Applications linéaires : approfondissements

Cours de É. Bouchet – PCSI

8 avril 2024

Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Détermination d'une application linéaire en dimension finie

1.1 Images de bases

Proposition 1.1 (Définition par l'image d'une base)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et on note $(e_1, \ldots, e_n)$ une de ses bases. Alors une application linéaire f de E dans F est définie de manière unique par la donnée de la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

Démonstration. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille d'éléments de F. On va montrer qu'il existe une unique application linéaire f telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = f_i$.

— Analyse : on suppose qu'il existe une telle application f. Soit $x \in E$, alors $\exists (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et par linéarité de f :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i f_i.$$

— Synthèse : soit f l'application de E dans F qui associe à tout vecteur $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ le vecteur $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f_i$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$, comme $e_i = 0e_1 + \cdots + 0e_{i-1} + 1e_i + 0e_{i+1} + \cdots + 0e_n$, on a $f(e_i) = f_i$. Montrons maintenant que f est linéaire : soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x, y) \in E^2$, alors $\exists (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $\exists (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. Cela donne $\lambda x + y = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + y_i) e_i$ et donc :

$$f(\lambda x + y) = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + y_i) f_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_i f_i + \sum_{i=1}^n y_i f_i = \lambda f(x) + f(y).$$

Donc f satisfait bien les conditions demandées.

D'où l'existence d'une unique application f qui convient. □

Exercice 1. Déterminer l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui vérifie $f((1,0)) = (2,1)$ et $f((0,1)) = (1,1)$.
<u>Solution :</u> Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la linéarité de f donne :

$$f((x,y)) = f(x(1,0) + y(0,1)) = xf((1,0)) + yf((0,1)) = x(2,1) + y(1,1) = (2x + y, x + y).$$

Proposition 1.2 (Caractérisation de l'injectivité, surjectivité, bijectivité)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et on note $(e_1, \ldots, e_n)$ une de ses bases. Alors :

— f est injective si et seulement si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de F.
— f est surjective si et seulement si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de F.
— f est bijective si et seulement si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de F.

Démonstration. Montrons ces trois résultats :

— On suppose que f est injective. La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre, donc $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de F (d'après le petit lemme du chapitre précédent).

— Réciproquement, on suppose que $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de F. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $x \in E$. Donc $\exists (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ (puisque $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de E). Par linéarité de f, on obtient :

$$0_F = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i).$$

Or les $f(e_i)$ sont une famille libre de F. Donc les x_i sont tous nuls. Donc $x = 0_E$ et $\mathrm{Ker}(f) \subset \{0_E\}$. La deuxième inclusion étant évidente, on obtient $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ par double inclusion. Donc f est injective.

— La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice de E, donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$. Alors :

$$f \text{ est surjective} \iff \mathrm{Im}(f) = F \iff \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = F \iff (f(e_1), \ldots, f(e_n)) \text{ est génératrice de } F.$$

— Le troisième résultat découle directement des deux précédents.

□

Exercice 2. Soit f l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par $f((1,0,0)) = (1,0)$, $f((0,1,0)) = (1,1)$ et $f((0,0,1)) = (0,1)$. Est-elle injective, surjective ?
Solution : L'image de la base $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ par f est $((1,0),(1,1),(0,1))$. Cette famille n'est pas libre (puisque $(1,1) = (1,0) + (0,1)$), elle est par contre génératrice de $\mathbb{R}^2$ (puisque $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}((1,0),(0,1))$. Donc f n'est pas injective, mais est surjective.

1.2 Espaces isomorphes

Définition 1.3 (Espaces vectoriels isomorphes)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On dit que E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de E dans F.

Remarque. Si f est un isomorphisme de F dans E, alors f^{-1} est un isomorphisme de E dans F. Donc E est F sont aussi isomorphes s'il existe un isomorphisme de F dans E.

Proposition 1.4 (Isomophismes et dimension n)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est de dimension n si et seulement si il est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Démonstration.
— Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Alors il possède une base $(e_1, \ldots, e_n)$. Soit f l'application linéaire qui à tout e_i associe le i-ème terme de la base canonique de $\mathbb{K}^n$. L'application f est linéaire par construction, et l'image de la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Donc elle est bijective. Donc E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
— Réciproquement, soit E un espace vectoriel isomorphe à $\mathbb{K}^n$. Il existe donc un isomorphisme f de $\mathbb{K}^n$ dans E. Comme f est bijective, l'image par f de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est une base de E. Donc E possède une base à n éléments et $\dim(E) = n$.

□

Proposition 1.5 (Isomophismes et dimension)

Deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F de dimension finie sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

Démonstration. On raisonne en deux temps (le cas de la dimension nulle se traiterait séparément).
— On suppose que $\dim(E) = \dim(F)$, on note $n \in \mathbb{N}^*$ cette valeur commune. Alors E et F sont tous les deux isomorphes à $\mathbb{K}^n$. Donc il existe des isomorphismes φ de E dans $\mathbb{K}^n$ et ψ de $\mathbb{K}^n$ dans F. Et par composition, $\psi \circ \varphi$ est un isomorphisme de E dans F. Donc E et F sont isomorphes.
— On suppose que E et F sont isomorphes. Donc il existe un isomorphisme ψ de F dans E. On note ensuite $n = \dim(E)$. Alors E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$: il existe un isomorphisme φ de E dans $\mathbb{K}^n$. Donc $\varphi \circ \psi$ est un isomorphisme de F à $\mathbb{K}^n$. Donc $\dim(F) = n$. Donc $\dim(F) = \dim(E)$.

□

Proposition 1.6 (Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie, et :

$$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F).$$

Démonstration. On pose $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$. On verra dans un prochain chapitre qu'il existe un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Donc $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et :

$$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})) = p \times n = \dim(E) \times \dim(F).$$

□

Proposition 1.7 (Lien entre injectivité, surjectivité, bijectivité et dimensions)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = \dim(F)$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :

$$f \text{ est injective } \iff f \text{ est surjective } \iff f \text{ est bijective }.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que si f est injective ou surjective, alors elle est bijective. Si E est de dimension 0, il n'y a rien à montrer. Sinon, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

— On suppose que f est injective, alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de F. Comme c'est une famille à $n = \dim(F)$ éléments, c'est une base. L'image d'une base par f est une base, donc f est bijective.

— On suppose que f est surjective, alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de F. Comme c'est une famille à $n = \dim(F)$ éléments, c'est une base. L'image d'une base par f est une base, donc f est bijective.

□

Remarque. Ce résultat s'applique en particulier aux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie.

Proposition 1.8 (Cas particulier de la réciproque en dimensions finies)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = \dim(F)$, f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans E. Alors :

— Si $f \circ g = \mathrm{id}_F$, f est bijective et $f^{-1} = g$.

— Si $g \circ f = \mathrm{id}_E$, f est bijective et $f^{-1} = g$.

Démonstration.

— On suppose que $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Soit $x \in F$, alors $f \circ g(x) = x$, donc $f(g(x)) = x$. Donc x admet un antécédent (en l'occurrence $g(x)$) par f. Donc f est surjective. Puisque $\dim(E) = \dim(F)$, f est également bijective. De plus, comme $f \circ g = \mathrm{id}_F$, on trouve en composant par f^{-1} à gauche que $g = f^{-1}$.

— On suppose que $g \circ f = \mathrm{id}_E$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $f(x) = 0_F$ et $g \circ f(x) = x$. Par linéarité de g, on obtient $g \circ f(x) = g(0_F) = 0_E$. Donc $x = 0_E$. Donc $\mathrm{Ker}(f) \subset \{0_E\}$. L'autre inclusion étant directe, on obtient $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, donc f est injective. Puisque $\dim(E) = \dim(F)$, f est également bijective. De plus, comme $g \circ f = \mathrm{id}_E$, on trouve en composant par f^{-1} à droite que $g = f^{-1}$.

□

Exemple. Si s est une symétrie, la relation $s^2 = \mathrm{id}_E$ implique que s est un bijective, et que $s^{-1} = s$.

1.3 Restriction d'une application linéaire

Proposition 1.9 (Caractérisation par la restriction à deux sous-espaces supplémentaires)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires.
Soit $f_1 \in \mathcal{L}(E_1,F)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(E_2,F)$. Alors il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ qui coïncide avec f_1 sur E_1 et avec f_2 sur E_2 (c'est-à-dire telle que $f_{|E_1} = f_1$ et $f_{|E_2} = f_2$).

Remarque. On rappelle que si f est une fonction de E dans F et A une partie de E, la restriction de f à A, notée $f_{|A}$, est l'application $f_{|A}$ définie sur A par $\forall x \in A,\ f_{|A}(x) = f(x)$.

Remarque. On peut donc définir une application linéaire f séparément sur E_1 et sur E_2.

Démonstration. Pour montrer l'existence et l'unicité de f, on procède par analyse-synthèse.

- Analyse : on suppose qu'il existe une telle application f. Soit $x \in E$, $\exists(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. Alors par linéarité :
$$f(x) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2).$$
- Synthèse : on définit f par $\forall x \in E,\ f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$ (avec les mêmes notations que dans l'analyse). Alors :
  - Soit $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\exists(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ et $\exists(y_1, y_2) \in E_1 \times E_2$ tels que $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$. On en déduit que $\lambda x + y = (\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2)$, avec $\lambda x_1 + y_1 \in E_1$ et $\lambda x_2 + y_2 \in E_2$. Donc, par linéarité de f_1 et f_2,
  $$f(\lambda x + y) = f_1(\lambda x_1 + y_1) + f_2(\lambda x_2 + y_2) = \lambda f_1(x_1) + f_1(y_1) + \lambda f_2(x_2) + f_2(y_2) = \lambda f(x) + f(y).$$
  Donc f est une application linéaire.
  - Si $x \in E_1$, on a $x = x + 0_E$, avec $x \in E_1$ et $0_E \in E_2$. Donc $f(x) = f_1(x) + f_2(0_E) = f_1(x) + 0_F = f_1(x)$.
  - Si $x \in E_2$, on a $x = 0_E + x$, avec $0_E \in E_1$ et $x \in E_2$. Donc $f(x) = f_1(0_E) + f_2(x) = 0_F + f_2(x) = f_2(x)$.

  Cette fonction satisfait donc bien toutes les conditions imposées.

Donc il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ qui coïncide avec f_1 sur E_1 et avec f_2 sur E_2. □

2 Théorème du rang

Proposition 2.1 (Forme géométrique du théorème du rang)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Si S est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E, alors la restriction de f à S (càd $f_{|S}$) est un isomorphisme de S dans $\mathrm{Im}(f)$.

Remarque. Il n'est pas nécessaire de supposer E ou F de dimension finie.

Démonstration. $f_{|S}$ est la restriction d'une application linéaire, c'est donc une application linéaire (immédiat). Montrons qu'elle est bijective :
- Par définition d'une restriction, $\mathrm{Ker}(f_{|S}) = S \cap \mathrm{Ker}(f)$. Or S et $\mathrm{Ker}(f)$ sont en somme directe, donc $S \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. Donc $\mathrm{Ker}(f_{|S}) = \{0_E\}$, donc $f_{|S}$ est injective de S dans $\mathrm{Im}(f)$.
- Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Comme $x \in E$, $\exists(x_S, x_K) \in S \times \mathrm{Ker}(f)$ tels que $x = x_S + x_K$. Alors,
$$y = f(x) = f(x_S) + f(x_K) = f(x_S) + 0_F = f(x_S) = f_{|S}(x_S).$$
  Donc y a un antécédent par $f_{|S}$. Donc $f_{|S}$ est surjective de S dans $\mathrm{Im}(f)$.

□

Proposition 2.2 (Théorème du rang)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On suppose que E est de dimension finie, alors $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$, c'est-à-dire $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$.

Remarque. Le fait que E soit de dimension finie garantit que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le seront aussi.

Démonstration. Comme E est de dimension finie, $\mathrm{Ker}(f)$ possède un supplémentaire, que l'on note S. Par propriétés des supplémentaires, on a alors $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(S)$.
La forme géométrique du théorème du rang donne de plus que $f_{|S}$ est bijective de S dans $\mathrm{Im}(f)$. Donc S et $\mathrm{Im}(f)$ sont isomorphes. Comme ces espaces vectoriels sont de dimension finie, on en déduit que $\dim(S) = \dim(\mathrm{Im}(f))$, ce qui permet de conclure. □

Exercice 3. Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire u définie de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ par :
$$\forall(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad u((x, y, z, t)) = (x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t).$$

Solution : Soit $a = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned}
a \in \mathrm{Ker}(u) &\iff (x+y+z+t, y-t, x-2z+3t) = (0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} x+y+z+t = 0 \\ y-t = 0 \\ x-2z+3t = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x+z = -2t \\ y = t \\ x-2z = -3t \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} z = \frac{t}{3} \quad (L_1 \leftarrow \frac{L_1-L_3}{3}) \\ y = t \\ x = \frac{-7t}{3} \end{cases} \\
&\iff a = t\left(-\frac{7}{3}, 1, \frac{1}{3}, 1\right) \\
a \in \mathrm{Ker}(u) &\iff a \in \mathrm{Vect}\left(\left(-\frac{7}{3}, 1, \frac{1}{3}, 1\right)\right)
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}((-\frac{7}{3}, 1, \frac{1}{3}, 1))$. Comme $(-\frac{7}{3}, 1, \frac{1}{3}, 1) \neq (0,0,0,0)$, c'est une base de $\mathrm{Ker}(u)$ et $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1$. Le théorème du rang donne alors $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\mathrm{Ker}(u)) = 4-1 = 3$. Donc $\dim(\mathrm{Im}(u)) = 3$. Or $\mathrm{Im}(u) \subset \mathbb{R}^3$ et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, donc $\mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}^3$.

3 Équations linéaires

Définition 3.1 (Équation linéaire, équation homogène associée)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On appelle **équation linéaire** toute équation d'inconnue $x \in E$ qu'on peut mettre sous la forme $f(x) = b$, où $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$.
L'équation $f(x) = 0_F$ est appelée **équation homogène** associée.

Remarque. Les solutions de l'équation homogène sont les vecteurs de $\mathrm{Ker}(f)$.

Proposition 3.2 (Forme de l'ensemble des solutions)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$. On note $S = \{x \in E | f(x) = b\}$. Alors :
- Soit S est vide.
- Soit il existe une solution particulière $x_P \in E$, et alors $S = \{x_P + x_H | x_H \in \mathrm{Ker}(f)\}$.

Remarque. Autrement dit, si S est non vide, les solutions sont les vecteurs de E qui s'écrivent comme somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène.

Démonstration. Si S n'est pas vide, alors il contient au moins un élément, qu'on note x_P. Soit $x \in E$, la linéarité de f donne alors :

$$x \in S \iff f(x) = b \iff f(x) = f(x_P) \iff f(x - x_P) = 0 \iff (x - x_P) \in \mathrm{Ker}(f) \iff x \in \{x_P + x_H | x_H \in \mathrm{Ker}(f)\},$$

ce qui donne l'égalité d'ensembles recherchée. □

Remarque. Attention, S n'est pas nécessairement un espace vectoriel (il ne contient pas toujours 0_E).

Exemple. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on pose $E = C^1(I, \mathbb{K})$ et $F = C^0(I, \mathbb{K})$. Soit a une fonction continue sur I, on pose f l'application de E dans F définie par $f : y \mapsto y' + ay$.
C'est une application linéaire. Pour tout $b \in F$, l'équation linéaire $f(y) = b$ correspond à l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$, dont on connaissait déjà la structure des solutions.

Exemple. On pose $E = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $F = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose f l'application de E dans F définie par $f : X \mapsto AX$.
C'est une application linéaire. Pour tout $B \in F$, l'équation linéaire $f(X) = B$ correspond au système $AX = B$. Cela signifie que si on trouve une solution particulière d'un système linéaire, on peut ensuite se contenter de rechercher les solutions du système homogène associé pour déterminer l'ensemble des solutions.

Exercice 4. Soit E l'ensemble des suites réelles. En se ramenant à une équation linéaire, déterminer les suites $u \in E$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.
<u>Solution :</u> Soit f l'application définie de E dans E par $f : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1} - 2u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On cherche donc les $u \in E$ solutions de $f((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (3)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $(u, v) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) &= f((\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}) \\ &= (\lambda u_{n+1} + v_{n+1} - 2\lambda u_n - 2v_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \lambda(u_{n+1} - 2u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_{n+1} - 2v_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \lambda f((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) + f((v_n)_{n\in\mathbb{N}}) \end{aligned}$$

Donc f est une application linéaire. Déterminons son noyau : soit $u \in E$,

$$u \in \operatorname{Ker}(f) \iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n \iff \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n u_0 \iff u \in \operatorname{Vect}((2^n)_{n\in\mathbb{N}}).$$

Donc $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}((2^n)_{n\in\mathbb{N}})$.
Il suffit maintenant de déterminer une solution particulière pour en déduire l'ensemble des solutions de l'équation linéaire. On cherche par exemple une solution constante, pour constater que la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = -3$ fonctionne (car $-3 = -6 + 3$). Donc l'ensemble des solutions est $\{(-3 + \lambda 2^n)_{n\in\mathbb{N}} | \lambda \in \mathbb{R}\}$.

4 Formes linéaires et hyperplans

Définition 4.1 (Forme linéaire)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Exemple. Soit C l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues sur $[0, 1]$. L'application $f \to \int_0^1 f(t)dt$ est une forme linéaire sur C.

Définition 4.2 (Hyperplan)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle **hyperplan** de E tout noyau d'une forme linéaire non nulle de E.

Remarque. Le noyau d'une forme linéaire nulle serait E tout entier.

Remarque. Si E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et φ une forme linéaire sur E non nulle. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, on a alors : $x \in \operatorname{Ker}(\varphi) \iff \varphi(x) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = 0$, où les $\varphi(e_i)$ ne sont pas tous nuls. Dans ce contexte, un hyperplan est donc un ensemble décrit par une équation linéaire non nulle sur les coordonnées x_i.

Exemple. Les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont les droites passant par l'origine (d'équation $ax + by = 0$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$), ceux de $\mathbb{R}^3$ sont les plans passant par l'origine (d'équation $ax+by+cz = 0$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$).

Exercice 5. Soit f la forme linéaire définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) = P(0)$. Déterminer l'hyperplan qui correspond à son noyau et déterminer l'équation linéaire sur les coordonnées qui le caractérise.
<u>Solution :</u> Soit $P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$P \in \operatorname{Ker}(f) \iff f(P) = 0 \iff c = 0 \iff P(X) = aX^2 + bX \iff P \in \operatorname{Vect}(X, X^2).$$

Donc $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}(X, X^2) = \{aX^2 + bX | (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et cet hyperplan est décrit par l'équation linéaire $c = 0$.

Proposition 4.3 (Supplémentaires d'un hyperplan)

Soit E un espace vectoriel. Si H est un hyperplan de E et D une droite vectorielle non contenue dans H, alors $E = H \oplus D$.

Remarque. Si E est de dimension finie, on obtient $\dim(E) = \dim(H) + \dim(D)$, et donc $\dim(H) = \dim(E) - 1$.

Remarque. Une telle droite existera toujours, puisque H est le noyau d'une forme linéaire φ **non nulle** : il suffit de choisir $v \notin \mathrm{Ker}(\varphi)$ et de poser $D = \mathrm{Vect}(v)$.

Démonstration. Soit φ une forme linéaire sur E non nulle, dont H est le noyau et (v) une base de D. Soit $x \in E$.

— Analyse : on suppose qu'il existe $x_H \in H$ et $x_D \in D$ tels que $x = x_H + x_D$. Alors $\varphi(x_H) = 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x_D = \lambda v$. Donc par linéarité,

$$\varphi(x) = \varphi(x_H) + \varphi(x_D) = 0_F + \lambda\varphi(v).$$

Or $\varphi(v) \neq 0$ puisque $v \notin \mathrm{Ker}(f)$ (la droite D n'est pas contenue dans H). Donc $\lambda = \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}$, donc $x_D = \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v$ et $x_H = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v$.

— Synthèse : on pose $x_D = \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v$ et $x_H = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v$. Alors de manière immédiate $x = x_H + x_D$ et $x_D \in D$. De plus,

$$\varphi(x_H) = \varphi\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v\right) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}\varphi(v) = 0.$$

Donc $x_H \in \mathrm{Ker}(\varphi) = H$.

Tout élément $x \in E$ se décompose de manière unique comme somme d'un élément de H et d'un élément de D, donc $E = H \oplus D$. $\square$