Applications linéaires : introduction

Cours de É. Bouchet – PCSI

27 mars 2023

Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.1 (Application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application de E dans F. On dit que f est une **application linéaire** de E dans F si elle vérifie :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Proposition 1.2 (Valeur en 0)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Alors $f(0_E) = 0_F$.

Démonstration. La linéarité de f donne $f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E)$. En retranchant $f(0_E)$ aux deux membres de cette égalité, on obtient que $f(0_E) = 0_F$. □

Proposition 1.3 (Caractérisation d'une application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. La fonction f est une application linéaire de E dans F si et seulement si $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

Démonstration.

— Supposons que f est une application linéaire, $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x+y) = f(\lambda x)+f(y) = \lambda f(x)+f(y)$. D'où le résultat.

— Supposons la condition vérifiée. Soit $(x,y) \in E^2$, $f(x+y) = f(1x+y) = 1f(x)+f(y) = f(x)+f(y)$. On en déduit en particulier que $f(0_E) = 0_F$. De plus, si $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x) = f(\lambda x+0_E) = \lambda f(x)+0_F = \lambda f(x)$. D'où le résultat.

□

Exercice 1. Montrer que l'application $P \to P'$ est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.
<u>Solution :</u> Soit P et Q deux polynômes, et λ un réel, $(\lambda P + Q)'(X) = \lambda P'(X) + Q'(X)$. Donc l'application étudiée est linéaire.

Exercice 2. Déterminer si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. La fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $f((x,y)) = x + y + 1$.
2. La fonction g définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $g((x,y)) = x + y$.
3. La fonction h définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $h((x,y)) = x \times y$.

<u>Solution :</u>

1. $f((0,0)) = 1 \neq 0$, donc f n'est pas une application linéaire.
2. Soit (x,y) et (x',y') deux éléments de $\mathbb{R}^2$, et λ un réel.
$$g\left(\lambda(x,y) + (x',y')\right) = g\left((\lambda x + x', \lambda y + y')\right) = \lambda x + x' + \lambda y + y' = \lambda g((x,y)) + g\left((x',y')\right).$$
Donc g est une application linéaire.
3. $h((0,1) + (1,0)) = h((1,1)) = 1 \neq 0 + 0 = h((0,1)) + h((1,0))$. Donc h n'est pas une application linéaire.

Exercice 3. Montrer que l'application f définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, par $f(M) = M^\top$ est une application linéaire.
Solution : Soit M et N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et λ un complexe. On a :

$$f(\lambda M + N) = (\lambda M + N)^\top = \lambda M^\top + N^\top = \lambda f(M) + f(N).$$

Donc f est bien une application linéaire.

1.2 Opérations usuelles

Proposition 1.4 (Espace vectoriel des applications linéaires)

L'ensemble des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est un espace vectoriel. On le note $\mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration. On va montrer que c'est un sous-espace vectoriel de F^E.

- L'application nulle est linéaire, donc dans $\mathcal{L}(E, F)$.
- Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $(x, y) \in E^2$, et $\mu \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned}(\lambda f + g)(\mu x + y) &= \lambda f(\mu x + y) + g(\mu x + y) \\ &= \lambda\mu f(x) + \lambda f(y) + \mu g(x) + g(y) \\ &= \mu(\lambda f(x) + g(x)) + \lambda f(y) + g(y) \\ &= \mu(\lambda f + g)(x) + (\lambda f + g)(y)\end{aligned}$$

  Donc $(\lambda f + g) \in \mathcal{L}(E, F)$, et $\mathcal{L}(E, F)$ est stable par combinaison linéaire.

Donc c'est un sous-espace vectoriel de F^E. Donc c'est un espace vectoriel. □

Proposition 1.5 (Composée de deux applications linéaires)

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si f est une application linéaire de E dans F, et g est une application linéaire de F dans G, alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Démonstration. Soit $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $g \circ f(\lambda x + y) = g(\lambda f(x) + f(y)) = \lambda g \circ f(x) + g \circ f(y)$. Donc $g \circ f$ est une application linéaire. □

Proposition 1.6 (Distributivité de la composition)

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si f et g sont des applications de E dans F, et h est une application linéaire de F dans G, alors $h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$.

Démonstration. $\forall x \in E$, $h \circ (f + g)(x) = h(f(x) + g(x)) = h \circ f(x) + h \circ g(x)$. D'où le résultat. □

Remarque. On savait déjà que si f est une application de E dans F, et g et h sont des applications de F dans G, alors $(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$, sans condition de linéarité.

1.3 Isomorphismes

Définition 1.7 (Isomorphisme)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et f une application linéaire de E dans F. On dit que f est un **isomorphisme** de E dans F lorsqu'elle est bijective de E dans F.

Exemple. L'application identité de E, notée id_E et définie par $x \to x$ est un isomorphisme de E.

Proposition 1.8 (Réciproque d'un isomorphisme)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et f un isomorphisme de E dans F. Alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Démonstration. Il est immédiat que f^{-1} est bijective de F dans E. Montrons que c'est une application linéaire. Soit $(y, z) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, la linéarité de f donne :

$$f^{-1}(\lambda y + z) = f^{-1}\left(\lambda f(f^{-1}(y)) + f(f^{-1}(z))\right) = f^{-1}\left(f(\lambda f^{-1}(y) + f^{-1}(z))\right) = \lambda f^{-1}(y) + f^{-1}(z).$$

Donc f^{-1} est bien un isomorphisme de F dans E. □

Proposition 1.9 (Composée d'isomorphismes)

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si f est un isomorphisme de E dans F, et g est un isomorphisme de F dans G, alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E dans G, et on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration. Découle directement des résultats déjà connus sur la composée de deux applications linéaires et la composée de deux bijections. □

2 Noyau, image et rang

2.1 Noyau et image

Proposition 2.1 (Image directe d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et H un sous-espace vectoriel de E. Alors $f(H)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Remarque. On rappelle que $f(H) = \{f(x) | x \in H\}$.

Démonstration. H est un sous-espace vectoriel de E, donc $0_E \in H$. De plus, $f(0_E) = 0_F$ puisque f est une application linéaire. Donc $0_F \in f(H)$.
Soit $(x, y) \in f(H)^2$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors il existe a et b dans H tels que $f(a) = x$ et $f(b) = y$. Comme H est un espace vectoriel, $\lambda a + b \in H$. De plus,

$$f(\lambda a + b) = \lambda f(a) + f(b) = \lambda x + y.$$

Donc $\lambda x + y \in f(H)$, donc $f(H)$ est un sous-espace vectoriel de F. □

Proposition 2.2 (Image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et G un sous-espace vectoriel de F. Alors $f^{-1}(G)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque. On rappelle que $f^{-1}(G) = \{x \in E | f(x) \in G\}$.

Démonstration. G est un sous-espace vectoriel de F, donc $0_F \in G$. De plus, $f(0_E) = 0_F$ puisque f est une application linéaire, donc $0_E \in f^{-1}(G)$.
Soit $(x, y) \in (f^{-1}(G))^2$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Puisque G est un espace vectoriel, la linéarité de f donne :

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) \in G.$$

Donc $\lambda x + y \in f^{-1}(G)$. Donc $f^{-1}(G)$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Définition 2.3 (Image d'une application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On appelle **image** de f, et on note $\mathrm{Im}(f)$, l'image directe de E par f.

Remarque. On a donc :

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{y \in F | \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x)\}.$$

De plus, d'après les résultats précédents, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Exercice 4. Soit g l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $g((x,y)) = x + y$. Déterminer son image.
Solution : Il est immédiat que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathbb{R}$. Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R}$, $x = g((x,0)) \in \mathrm{Im}(g)$. On a donc montré par double inclusion que $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}$.

Proposition 2.4 (Image et surjectivité)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. La fonction f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Démonstration. Immédiat, puisqu'une application de E dans F est surjective si et seulement si $f(E) = F$. □

Remarque. On peut également noter que $\mathrm{Im}(f) = \{0_F\}$ si et seulement si f est l'application nulle.

Définition 2.5 (Noyau d'une application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et f une application linéaire de E dans F. On appelle **noyau** de f, et on note $\mathrm{Ker}(f)$, l'image réciproque de $\{0_F\}$ par f.

Remarque. On a donc :

$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E | f(x) = 0_F\}.$$

De plus, d'après les résultats précédents, $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 5. Soit g l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $g((x,y)) = x + y$. Déterminer son noyau.
Solution : Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x,y) \in \mathrm{Ker}(g) \iff g((x,y)) = 0 \iff x + y = 0 \iff (x,y) = x(1,-1) \iff (x,y) \in \mathrm{Vect}((1,-1)).$$

On a donc $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Vect}((1,-1)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0\}$.

Proposition 2.6 (Noyau et injectivité)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et f une application linéaire de E dans F. La fonction f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Démonstration.

— Supposons que f est injective. Alors 0_F a au plus un antécédent par f, donc $\mathrm{Ker}(f)$ a au plus un élément. Or $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$ puisque f est linéaire. Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
— Réciproquement, supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. Soit $(x,y) \in E^2$, supposons que $f(x) = f(y)$. Alors par linéarité, $f(x-y) = 0_F$, et $x - y \in \mathrm{Ker}(f)$, donc $x - y = 0_E$ et $x = y$. Donc f est injective.

□

Remarque. On peut également noter que $\mathrm{Ker}(f) = E$ si et seulement si f est l'application nulle.

Exercice 6. On considère l'application linéaire $f : P \to P'$ définie de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$. Trouver son noyau et son image. Est-elle injective ? surjective ?
Solution :

- On commence par chercher le noyau. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$P \in \mathrm{Ker}(f) \iff P' = 0 \iff \deg(P) = 0 \text{ ou } -\infty \iff P \in \mathbb{R}_0[X].$$

  Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[X]$. Comme $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$, l'application f n'est pas injective.
- Cherchons l'image. Il est direct que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}[X]$. Réciproquement, soit $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. On pose $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k+1} X^{k+1}$, alors $f(P) = Q$, et $Q \in \mathrm{Im}(f)$. Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}[X]$, et l'application f est surjective.

Proposition 2.7 (Famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On suppose que E est de dimension finie et on note $(e_1, \ldots, e_n)$ une de ses familles génératrices. Alors :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n)).$$

Démonstration. Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et comme la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice de E on peut écrire $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. On a donc, par linéarité de f :

$$y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i).$$

Donc $y \in \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ et $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$. L'inclusion réciproque étant évidente, on obtient l'égalité des ensembles. □

Remarque. C'est en particulier vrai lorsque $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.

Exercice 7. Soit f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (4x - 6y, 2x - 3y)$. Montrer que c'est une application linéaire et déterminer $\mathrm{Im}(f)$.
Solution : Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda(x,y) + (a,b)) &= f((\lambda x + a, \lambda y + b)) \\ &= (4(\lambda x + a) - 6(\lambda y + b), 2(\lambda x + a) - 3(\lambda y + b)) \\ &= (\lambda(4x - 6y) + 4a - 6b, \lambda(2x - 3y) + 2a - 3b) \\ &= \lambda(4x - 6y, 2x - 3y) + (4a - 6b, 2a - 3b) \\ &= \lambda f((x,y)) + f((a,b)) \end{aligned}$$

Donc f est une application linéaire. De plus, $((1,0),(0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$, donc

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f((1,0)), f((0,1))\right) = \mathrm{Vect}\left((4,2), (-6,-3)\right) = \mathrm{Vect}\left((4,2)\right),$$

où la dernière égalité provient de la relation $(-6,-3) = -\frac{3}{2}(4,2)$.

2.2 Rang

Définition 2.8 (Rang d'une application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On dit que f est **de rang fini** quand $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie. Dans ce cas, on appelle **rang** de f, et on note $\mathrm{rg}(f)$ la valeur :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim\left(\mathrm{Im}(f)\right) = \dim(f(E)).$$

Remarque. La fonction nulle est la seule application de rang 0.

Remarque. $\mathrm{Im}(f) \subset F$ donc si F est de dimension finie, $\dim(\mathrm{Im}(u)) \leqslant \dim(F)$. On en déduit $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(F)$.

Remarque. Si E est un espace de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, de base $(e_1, \ldots, e_n)$. On a $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ donc $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) \leqslant n$, et en particulier $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(E)$.

Exercice 8. Soit f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (4x - 6y, 2x - 3y)$. Déterminer son rang.
Solution : On a montré plus haut que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left((4,2)\right)$. Or $(4,2) \neq (0,0)$ donc $\mathrm{rg}(f) = 1$.

Proposition 2.9 (Rang de la composée)

Soit E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors :

$$\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v)).$$

Démonstration. Par définition, $\mathrm{rg}(v \circ u) = \dim\big((v \circ u)(E)\big) = \dim\big(v(u(E))\big)$.
- $u(E) \subset F$, donc $v(u(E)) \subset v(F)$. Donc $\dim\big(v(u(E))\big) \leqslant \dim(v(F))$, ce qui donne $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(v)$.
- $u(E)$ est de dimension finie, notons $(f_1, \ldots, f_n)$ une de ses bases (le cas où $u(E) = \{0_F\}$ est immédiat). Alors $\dim\big(v(u(E))\big) = \dim(\mathrm{Vect}(v(f_1), \ldots, v(f_n))) = \mathrm{rg}(v(f_1), \ldots, v(f_n)) \leqslant n = \dim(u(E))$. On en déduit $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(u)$.

$\square$

Proposition 2.10 (Petit lemme)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire injective de E dans F. Alors l'image par f d'une famille libre de E est une famille libre de F.

Démonstration. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E, montrons que $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de F. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on suppose que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0_F.$$

On a alors, par linéarité de f, $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0_F$, càd $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in \mathrm{Ker}(f)$. Comme f est injective, $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, ce qui nous donne $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$. Et comme $(e_1, \ldots e_n)$ est une famille libre de E, les λ_i sont tous nuls. Donc $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre dans F. $\square$

Proposition 2.11 (Invariance du rang par composition par un isomorphisme)

Soit E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors :
- Si u est un isomorphisme, $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(v)$.
- Si v est un isomorphisme, $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u)$.

Démonstration.
- Si u est un isomorphisme, alors en particulier u est surjective, donc $u(E) = F$. Donc :

$$\mathrm{rg}(v \circ u) = \dim\big(v(u(E))\big) = \dim(v(F)) = \mathrm{rg}(v).$$

- Si v est un isomorphisme, alors en particulier v est injective. Comme $u(E)$ est de dimension finie, notons $(f_1, \ldots, f_n)$ une de ses bases (le cas où $u(E) = \{0_F\}$ est immédiat). Alors (d'après le petit lemme) $(v(f_1), \ldots, v(f_n))$ est une famille libre de G. On déduit de tout cela :

$$\mathrm{rg}(v \circ u) = \dim\big(v(u(E))\big) = \dim(\mathrm{Vect}(v(f_1), \ldots, v(f_n))) = n = \dim(u(E)) = \mathrm{rg}(u).$$

$\square$

3 Endomorphismes

3.1 Définitions et opérations usuelles

Définition 3.1 (Endomorphisme)

Soit E un espace vectoriel. On appelle **endomorphisme** de E toute application linéaire de E dans E.

Définition 3.2 (Homothétie)

Soit E un espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle **homothétie** de rapport λ l'endomorphisme h de E défini par $\forall x \in E$, $h(x) = \lambda x$.

Remarque. On a alors $h = \lambda \operatorname{id}_E$, où id_E est l'application identité de E.

Proposition 3.3 (Espace vectoriel des endomorphismes)

L'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel E est un espace vectoriel. On le note $\mathcal{L}(E)$.

Démonstration. $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$, c'est donc un cas particulier d'un résultat déjà rencontré. □

Définition 3.4 (Puissances d'un endomorphisme)

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $f^0 = \operatorname{id}_E$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{p+1} = f^p \circ f = f \circ f^p$.

Remarque. On a ainsi $f^0 = \operatorname{id}_E$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f \ldots$

Remarque. Attention : la notation puissance se réfère habituellement à des produits, mais ici, il s'agit bien de compositions, pas de produits !

Exemple. L'application $f : P \to P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. On peut donc définir ses puissances : pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(P(X)) = P^{(n)}(X)$.

Proposition 3.5 (Formule du binôme de Newton)

Soit E un espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}.$$

Démonstration. Cette formule se montre par récurrence, de la même façon que la formule du binôme de Newton pour les matrices. □

3.2 Projecteurs et symétries

Dans toute cette partie, on notera E un espace vectoriel, et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Pour tout vecteur $x \in E$, on note (x_1, x_2) l'unique couple de $F_1 \times F_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.

Définition 3.6 (Projecteur, symétrie)

On appelle **projecteur** sur F_1 parallèlement à F_2 l'application p définie par $\forall x \in E$, $p(x) = x_1$.
On appelle **symétrie** par rapport à F_1 parallèlement à F_2 l'application s définie par $\forall x \in E$, $s(x) = x_1 - x_2$.

Exemple. $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}\left((1,0)\right) \oplus \mathrm{Vect}\left((0,1)\right)$, avec $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) = (x,0) + (0,y)$ (FAIRE UN DESSIN).

- $(x,y) \mapsto (x,0)$ est le projecteur sur $\mathrm{Vect}\left((1,0)\right)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\left((0,1)\right)$.
- $(x,y) \mapsto (x,-y)$ est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}\left((1,0)\right)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\left((0,1)\right)$.

Exemple. $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}\left((1,0)\right) \oplus \mathrm{Vect}\left((1,1)\right)$, avec $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) = (x-y,0) + (y,y)$ (FAIRE UN DESSIN)

- $(x,y) \mapsto (x-y,0)$ est le projecteur sur $\mathrm{Vect}\left((1,0)\right)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\left((1,1)\right)$.
- $(x,y) \mapsto (x-2y,-y)$ est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}\left((1,0)\right)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\left((1,1)\right)$.

Remarque. p est le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2 quand $p|_{F_1} = \mathrm{id}_E$ et $p|_{F_2} = 0_F$.
s est la symétrie par rapport à F_1, parallèlement à F_2 quand $s|_{F_1} = \mathrm{id}_E$ et $s|_{F_2} = -\mathrm{id}_E$.

Proposition 3.7 (Linéarité des projecteurs et symétries)

Les projecteurs et les symétries définis sur E sont des endomorphismes de E.

Démonstration. On effectue la preuve dans le cas d'un projecteur, elle s'adapte facilement au cas d'une symétrie. Soit p le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2, où $E = F_1 \oplus F_2$. Il est immédiat que p est à valeurs dans E, il suffit donc de montrer que c'est une application linéaire. Soit $(x,y) \in E^2$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\exists (x_1,x_2) \in F_1 \times F_2$ et $\exists (y_1,y_2) \in F_1 \times F_2$ tels que $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$. Alors, $\lambda x + y = (\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2)$, avec $\lambda x_1 + y_1 \in F_1$, $\lambda x_2 + y_2 \in F_2$ et on a $p(\lambda x + y) = \lambda x_1 + y_1 = \lambda p(x) + p(y)$. D'où le résultat. □

Proposition 3.8 (Caractéristiques d'un projecteur)

Soit p le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2. Alors $F_1 = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ et $F_2 = \mathrm{Ker}(p)$.

Démonstration. Soit $x \in E$, alors $\exists (x_1,x_2) \in F_1 \times F_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. Alors :

$$x \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) \iff p(x) - x = 0_E \iff x_1 - x_1 + x_2 = 0_E \iff x_2 = 0_E \iff x \in F_1,$$

$$x \in \mathrm{Ker}(p) \iff p(x) = 0_E \iff x_1 = 0_E \iff x \in F_2.$$

Enfin, on montre $F_1 = \mathrm{Im}(p)$ par double inclusion. Soit $x \in F_1$, alors $x = x + 0_E$, où $(x, 0_E) \in F_1 \times F_2$. Donc $p(x) = x$. On en déduit que $x \in \mathrm{Im}(p)$ et $F_1 \subset \mathrm{Im}(p)$. Réciproquement, si $x \in \mathrm{Im}(p)$, il existe $z \in E$ tel que $x = p(z)$. Or $\exists (z_1,z_2) \in F_1 \times F_2$ tels que $z = z_1 + z_2$. Alors $x = z_1 \in F_1$ et $\mathrm{Im}(p) \subset F_1$. D'où le résultat. □

Proposition 3.9 (Caractéristiques d'une symétrie)

Soit s la symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2. Alors $F_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $F_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Démonstration. Soit $x \in E$, alors $\exists (x_1,x_2) \in F_1 \times F_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. Alors :

$$x \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \iff s(x) - x = 0_E \iff x_1 - x_2 + x_1 - x_2 = 0_E \iff x_2 = 0_E \iff x \in F_1,$$

$$x \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) \iff s(x) + x = 0_E \iff x_1 - x_2 + x_1 + x_2 = 0_E \iff x_1 = 0_E \iff x \in F_2.$$

□

Proposition 3.10 (Caractérisation des projecteurs)

Soit f un endomorphisme de E. La fonction f est un projecteur si et seulement si $f \circ f = f$.

Démonstration.

— Supposons que f est un projecteur (sur F_1 parallèlement à F_2, avec $E = F_1 \oplus F_2$). Soit $x \in E$, alors $\exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. Donc $f(x) = x_1$, et comme $x_1 = x_1 + 0_E$ avec $x_1 \in F_1$ et $0_E \in F_2$ cela donne :

$$f \circ f(x) = f(x_1) = x_1 = f(x).$$

Cela étant vrai pour tout $x \in E$, on a bien $f \circ f = f$.

— Réciproquement, supposons que $f \circ f = f$. Montrons que f est le projecteur sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$. Pour cela, il faut commencer par montrer que ces deux espaces vectoriels sont bien supplémentaires : soit $x \in E$, on va montrer qu'il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathrm{Im}(f) \times \mathrm{Ker}(f)$ tel que $x = x_1 + x_2$.

— Analyse : supposons qu'un tel couple existe. Comme $x_1 \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $y \in E$ tel que $f(y) = x_1$, et donc $x = f(y) + x_2$. En appliquant f de nouveau, on trouve par linéarité :

$$f(x) = f \circ f(y) + f(x_2) = f \circ f(y) = f(y) = x_1.$$

Donc nécessairement, $x_1 = f(x)$ et $x_2 = x - f(x)$.

— Synthèse : soit $x \in E$. On pose $x_1 = f(x)$ et $x_2 = x - f(x)$. Il est immédiat que $x_1 \in \mathrm{Im}(f)$, par ailleurs :

$$f(x_2) = f(x - f(x)) = f(x) - f \circ f(x) = f(x) - f(x) = 0_E,$$

donc $x_2 \in \mathrm{Ker}(f)$. Comme de plus $x = f(x) + (x - f(x)) = x_1 + x_2$, cette décomposition convient bien.

Donc $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans E. Soit $x \in E$, donc $\exists (x_1, x_2) \in \mathrm{Im}(f) \times \mathrm{Ker}(f)$ tels que $x = x_1 + x_2$. Alors $f(x_2) = 0_E$ et $\exists y \in E$ tel que $f(y) = x_1$, on a donc puisque $f \circ f = f$:

$$f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f \circ f(y) + 0_E = f(y) = x_1.$$

Donc f est bien le projecteur de E sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.

$\square$

Exercice 9. Soit f l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f((x, y)) = (4x - 6y, 2x - 3y)$. Montrer que f est un projecteur, en précisant ses caractéristiques.

Solution : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$f \circ f((x, y)) = f((4x - 6y, 2x - 3y)) = (16x - 24y - 12x + 18y, 8x - 12y - 6x + 9y) = (4x - 6y, 2x - 3y) = f((x, y)).$$

Donc $f \circ f = f$, et f est un projecteur. On va maintenant chercher son noyau et son image :

— Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
(x, y) \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f((x, y)) = (0, 0) \\
&\iff (4x - 6y, 2x - 3y) = (0, 0) \\
&\iff 2x - 3y = 0 \\
&\iff (x, y) = \frac{x}{3}(3, 2) \\
&\iff (x, y) \in \mathrm{Vect}((3, 2)),
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne par double inclusion $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((3, 2))$.

— $((1, 0), (0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f((1, 0)), f((0, 1))\right) = \mathrm{Vect}((4, 2), (-6, -3)) = \mathrm{Vect}((4, 2)),$$

puisque $(-6, -3) = -\frac{3}{2}(4, 2)$.

Donc f est le projecteur sur $\mathrm{Vect}((4, 2))$ parallèlement à $\mathrm{Vect}((3, 2))$.

Rmq : pour l'image, comme il s'agit d'un projecteur, on pouvait aussi chercher $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.

Proposition 3.11 (Caractérisation des symétries)

Soit f un endomorphisme de E. La fonction f est une symétrie si et seulement si $f \circ f = \mathrm{id}_E$.

Démonstration.

— Supposons que f est une symétrie (par rapport à F_1 parallèlement à F_2, avec $E = F_1 \oplus F_2$). Soit $x \in E$, $\exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. Alors $f(x) = x_1 - x_2$, et comme $x_1 \in F_1$ et $-x_2 \in F_2$ cela donne :

$$f \circ f(x) = f(x_1 - x_2) = x_1 - (-x_2) = x_1 + x_2 = x.$$

Cela étant vrai pour tout $x \in E$, on a bien $f \circ f = \mathrm{id}_E$.

— Réciproquement, supposons que $f \circ f = \mathrm{id}_E$. Montrons que f est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$. Pour cela, il faut commencer par montrer que ces deux espaces vectoriels sont bien supplémentaires. On procède comme dans le cas de la caractérisation des projecteurs, cette fois-ci avec la décomposition :

$$x = \underbrace{\frac{1}{2}(x + f(x))}_{\in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)} + \underbrace{\frac{1}{2}(x - f(x))}_{\in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)}.$$

Soit $x \in E$, donc $\exists (x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \times \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$ tels que $x = x_1 + x_2$. Alors :

$$f(x) = f(x_1) + f(x_2) = x_1 - x_2.$$

Donc f est bien la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$.

□

3.3 Automorphismes

Définition 3.12 (Automorphisme, groupe linéaire de E)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On dit que f est un **automorphisme** de E lorsqu'elle est bijective de E dans E.
On appelle **groupe linéaire** de E et on note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Remarque. Pour être un automorphisme, il faut donc être à la fois un endomorphisme et un isomorphisme.

Exemple. Les symétries sont des automorphismes, les homothéties de rapport non nul aussi.

Proposition 3.13 (Propriétés des automorphismes)

Soit E un espace vectoriel. Alors :
— $\forall (u, v) \in GL(E)^2$, $u \circ v \in GL(E)$.
— $\forall u \in GL(E)$, $u \circ \mathrm{id}_E = u = \mathrm{id}_E \circ u$.
— $\forall u \in GL(E)$, $u^{-1} \in GL(E)$.

Démonstration. Découle directement des propriétés des isomorphismes, des endomorphismes et des compositions.

□

Remarque. Soit $u \in GL(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$. On peut définir u^k par : $u^k = \begin{cases} \mathrm{id}_E \text{ si } k = 0 \\ \underbrace{u \circ \ldots \circ u}_{k \text{ fois}} \text{ si } k > 0 \\ \underbrace{u^{-1} \circ \ldots \circ u^{-1}}_{-k \text{ fois}} \text{ si } k < 0 \end{cases}$