Applications des nombres complexes

Cours de É. Bouchet – PCSI

16 novembre 2022

Table des matières

1 Équations algébriques

1.1 Racines d'un nombre complexe

Définition 1.1 (Racines d'un nombre complexe)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. L'équation $t^2 = z$ d'inconnue $t \in \mathbb{C}$ admet exactement deux solutions opposées, appelées **racines de** z.

Démonstration. On pose $z = |z|\, e^{i\theta}$, avec θ un argument de z, et $t = |t|\, e^{i\varphi}$, avec φ un argument de t. On a alors, grâce à un passage au module :

$$t^2 = z \Leftrightarrow |t|^2 e^{2i\varphi} = |z|\, e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} |t|^2 e^{2i\varphi} = |z|\, e^{i\theta} \\ |t|^2 = |z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2i\varphi} = e^{i\theta} \\ |t| = \sqrt{|z|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\varphi \equiv \theta[2\pi] \\ |t| = \sqrt{|z|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \equiv \frac{\theta}{2}[\pi] \\ |t| = \sqrt{|z|} \end{cases}$$

On trouve donc exactement deux solutions distinctes : $z_1 = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z_2 = \sqrt{|z|}e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)} = -z_1$. $\square$

Remarque. La notation $\sqrt{z}$ est absolument réservée aux nombres réels positifs, elle ne doit JAMAIS être utilisée dans le cas plus général d'un nombre complexe (notamment parce qu'on ne saurait pas laquelle des deux racines choisir).

Exercice 1. Déterminer les racines complexes de -4 et de i.
Solution : Les racines complexes de -4 sont $2i$ et $-2i$.
On a $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, les racines complexes de i sont donc $e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-e^{\frac{i\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Remarque. La résolution se fait très bien sous forme exponentielle, c'est plus calculatoire avec la forme algébrique, mais faire intervenir le module permet de simplifier les calculs.

Exercice 2. En effectuant les calculs sous forme algébrique, déterminer les racines complexes de $3 + 4i$.
Solution : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Faire intervenir le module, puis identifier les parties réelle et imaginaire donne :

$$(a+ib)^2 = 3+4i \iff \begin{cases} (a+ib)^2 = 3+4i \\ |a+ib|^2 = |3+4i| \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 - b^2 + 2iab = 3+4i \\ a^2 + b^2 = \sqrt{9+16} \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ ab = 2 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{25} \end{cases}.$$

Il ne reste alors plus qu'à résoudre le système :

$$(a+ib)^2 = 3+4i \iff \begin{cases} a^2 = \frac{5+3}{2} \\ b^2 = \frac{5-3}{2} \\ ab = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \\ ab = 2 \end{cases} \iff (a,b) = \pm(2,1) \text{ car } ab > 0$$

Les deux racines complexes de $3 + 4i$ sont donc $2 + i$ et $-2 - i$.

1.2 Factorisations et résolution d'équations

Proposition 1.2 (Racines complexes des polynômes de degré 2)

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq 0$. Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont $\dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $\dfrac{-b-\delta}{2a}$, où δ est une racine carrée complexe de $b^2 - 4ac$.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$. Comme dans le cas réel, on met l'expression sous forme canonique :

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left(z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}\right).$$

D'où la résolution, en notant δ une racine carrée de b^2-4ac :

$$az^2+bz+c=0 \Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{(2a)^2} \Leftrightarrow z+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\delta}{2a} \Leftrightarrow z=\frac{-b\pm\delta}{2a}.$$

Ce qui donne le résultat annoncé. □

Exercice 3. Déterminer les solutions complexes de l'équation $z^2-z-i-\frac{1}{2}=0$.
Solution : Le discriminant vaut $1-4(-i-\frac{1}{2})=1+4i+2=3+4i$, dont on a calculé les racines dans un exercice précédent, donc on peut utiliser $\delta=2+i$. Les solutions de l'équation sont donc $\dfrac{1\pm(2+i)}{2}$, c'est-à-dire $\dfrac{3+i}{2}$ et $\dfrac{-1-i}{2}$.

Proposition 1.3 (Somme et produit des racines d'un polynôme de degré 2)

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ avec $a\neq 0$ et z_1, z_2 les solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$ dans $\mathbb{C}$. Alors :

$$z_1+z_2=\frac{-b}{a} \quad \text{et} \quad z_1z_2=\frac{c}{a}.$$

Remarque. Dans le cas d'une racine double, ce résultat reste valable en utilisant la même valeur pour z_1 et z_2.

Démonstration. D'après le résultat précédent, on peut écrire $z_1=\dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b-\delta}{2a}$, où delta est une racine carrée de b^2-4ac. On en déduit directement :

$$z_1+z_2=\frac{-b+\delta-b-\delta}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a} \quad \text{et} \quad z_1z_2=\frac{(-b+\delta)(-b-\delta)}{4a^2}=\frac{b^2-\delta^2}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

□

Pour le cas des équations de degré supérieur, on utilise la propriété suivante :

Proposition 1.4 (Factorisation par une racine complexe)

Soit P une fonction polynomiale à coefficients complexes admettant $a\in\mathbb{C}$ comme racine. Alors on peut factoriser $P(z)$ par $z-a$.

Démonstration. Sera montré dans le chapitre sur les polynômes. □

Exercice 4. Soit $z\in\mathbb{C}$. Factoriser $z^2-z-i-\frac{1}{2}$.
Solution : Les résultats des exercices précédents donnent :

$$z^2-z-i-\frac{1}{2}=1\left(z-\frac{3+i}{2}\right)\left(z-\frac{-1-i}{2}\right)=\left(z-\frac{3+i}{2}\right)\left(z+\frac{1+i}{2}\right).$$

1.3 Racines n-ièmes de l'unité

Définition 1.5 (Racine n-ième de l'unité)

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On appelle **racine n-ième de l'unité** toute solution complexe de l'équation $z^n=1$.
On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Proposition 1.6 (Valeurs des racines n-ièmes de l'unité)

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité distinctes : $\mathbb{U}_n=\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} | k\in[\![0,n-1]\!]\right\}$.

Démonstration. On cherche à résoudre l'équation $z^n = 1$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
Comme le but est de calculer z^n et comme 0 n'est pas solution, la forme exponentielle semble la plus adaptée : on pose $z = |z|\, e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

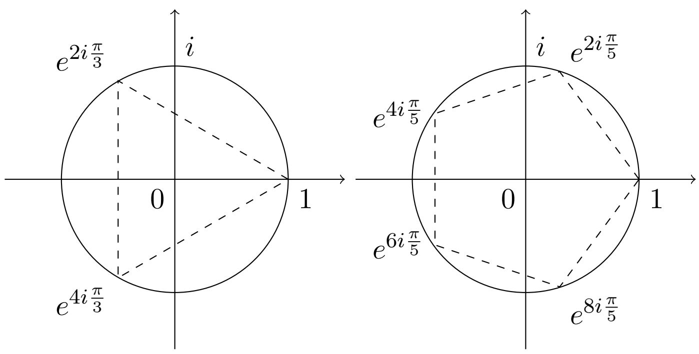
$$z^n = 1 \iff |z|^n\, e^{in\theta} = 1 \iff |z|^n = 1 \text{ et } e^{in\theta} = 1 \text{ (en prenant le module).}$$

Comme $|z| \in \mathbb{R}_+$, $|z|^n = 1 \iff |z| = 1$. Par ailleurs,

$$e^{in\theta} = 1 \iff n\theta \equiv 0[2\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta = \frac{2k\pi}{n}.$$

L'ensemble des solutions de $z^n = 1$ dans $\mathbb{C}$ est donc : $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} | k \in \mathbb{Z} \right\}$.
Comme $e^{2i\pi} = 1$, cet ensemble contient des doublons. En les retirant, on obtient $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} | k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$, qui contient bien des complexes tous distincts (les $\frac{2k\pi}{n}$ sont distincts et à valeurs dans $[0, 2\pi[$, donc les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ sont également distincts). □

Remarque. Sur le cercle trigonométrique, les points de $\mathbb{U}_n$ correspondent aux n sommets d'un polygone régulier.



Proposition 1.7 (Somme des racines n-ièmes de l'unité)

Soit un entier $n \geqslant 2$. Alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0$.

Remarque. Cela signifie que $\displaystyle\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = 0$.

Démonstration. Par formule de somme géométrique, comme $e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k = \frac{1 - e^{\frac{2in\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = \frac{1 - e^{2i\pi}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = \frac{1-1}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = 0.$$

□

1.4 Cas général

Définition 1.8 (Racine n-ième, cas général)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$, on appelle **racine n-ième** de a toute solution de l'équation $z^n = a$, pour $z \in \mathbb{C}$.

Proposition 1.9 (Valeurs des racines n-ièmes d'un nombre complexe)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = |a|\, e^{i\theta}$.
Les racines n-ièmes de a sont les éléments de l'ensemble $\left\{ \sqrt[n]{|a|} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} | k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on pose $z = |z|\, e^{it}$ avec $t \in \mathbb{R}$. Alors :

$$z^n = a \iff |z|^n\, e^{int} = |a|\, e^{i\theta} \iff \begin{cases} |z|^n = |a| \\ e^{int} = e^{i\theta} \end{cases} \iff \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|a|} \\ nt \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|a|} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } t = \frac{\theta+2k\pi}{n} \end{cases}$$

d'où le résultat annoncé en retirant les doublons.

Variante : on commence par constater que $\left(\sqrt[n]{|a|}e^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n = a$, les équivalences deviennent alors :

$$z^n = a \iff \left(\frac{z}{\sqrt[n]{|a|}e^{i\frac{\theta}{n}}}\right)^n = 1 \iff \frac{z}{\sqrt[n]{|a|}e^{i\frac{\theta}{n}}} \in \mathbb{U}_n \iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \text{ tel que } z = \sqrt[n]{|a|}e^{i\frac{\theta}{n}}e^{i\frac{2k\pi}{n}}.$$

□

Exercice 5. Déterminer les solutions complexes de l'équation $z^3 = 8e^{i\pi}$.
Solution : Il suffit de déterminer les racines 3-ièmes de $8e^{i\pi}$: $2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $2e^{i\pi}$ et $2e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

2 Exponentielle complexe

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 2.1 (Exponentielle complexe)

Soit $z \in \mathbb{C}$, on définit **l'exponentielle complexe** de z comme le nombre complexe $e^{\mathrm{Re}(z)}e^{i\,\mathrm{Im}(z)}$. Elle est notée $\exp(z)$ ou e^z.

Exemple 6. $e^{1+i} = e^1 e^i = ee^i = e\cos(1) + ie\sin(1)$.

Proposition 2.2 (Module et arguments de l'exponentielle complexe)

Soit $z \in \mathbb{C}$, alors $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ et un argument est $\mathrm{Im}(z)$.

Démonstration. Par définition de l'exponentielle complexe et propriétés du module,

$$|e^z| = \left|e^{\mathrm{Re}(z)}\right|\left|e^{i\,\mathrm{Im}(z)}\right| = e^{\mathrm{Re}(z)} \times 1 = e^{\mathrm{Re}(z)}.$$

La valeur d'un argument en est directement déduite. □

2.2 Opérations sur les exponentielles complexes

Proposition 2.3 (Exponentielle d'une somme de nombres complexes)

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, on a $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

Démonstration. Il suffit de revenir à la définition, d'utiliser les propriétés de l'exponentielle réelle et de e^{it} :

$$e^{z_1+z_2} = e^{\mathrm{Re}(z_1+z_2)}e^{i\,\mathrm{Im}(z_1+z_2)} = e^{\mathrm{Re}(z_1)+\mathrm{Re}(z_2)}e^{i\,\mathrm{Im}(z_1)+i\,\mathrm{Im}(z_2)} = e^{\mathrm{Re}(z_1)}e^{\mathrm{Re}(z_2)}e^{i\,\mathrm{Im}(z_1)}e^{i\,\mathrm{Im}(z_2)} = e^{z_1}e^{z_2}$$

□

Proposition 2.4 (Cas d'égalité des exponentielles de nombres complexes)

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $\exp(z_1) = \exp(z_2) \iff z_1 - z_2 \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, les propriétés du module et des arguments donnent :

$$\exp(z_1) = \exp(z_2) \Leftrightarrow e^{\mathrm{Re}(z_1)} e^{i\,\mathrm{Im}(z_1)} = e^{\mathrm{Re}(z_2)} e^{i\,\mathrm{Im}(z_2)} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\mathrm{Re}(z_1)} = e^{\mathrm{Re}(z_2)} \\ \mathrm{Im}(z_1) \equiv \mathrm{Im}(z_2)[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \\ \mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2) \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}.$$

On en déduit donc : $\exp(z_1) = \exp(z_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z_1 - z_2) = 0 \\ \mathrm{Im}(z_1 - z_2) \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow z_1 - z_2 \in 2i\pi\mathbb{Z}.$ □

Exercice 7. Déterminer les solutions complexes à l'équation $\exp(z) = 1 + i$.
<u>Solution :</u> Soit $z \in \mathbb{C}$, on commence par montrer que $1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$, puis la stricte croissance du logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$ donne :

$$e^z = 1 + i \Longleftrightarrow e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\,\mathrm{Im}(z)} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \Longleftrightarrow \begin{cases} e^{\mathrm{Re}(z)} = \sqrt{2} \\ \mathrm{Im}(z) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \frac{\ln(2)}{2} \\ \mathrm{Im}(z) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}.$$

Les solutions sont donc les nombres complexes sous la forme $\frac{\ln(2)}{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

2.3 Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle

Définition 2.5 (Dérivation d'une fonction à valeurs complexes)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction définie de I dans $\mathbb{C}$. Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont. On appelle alors nombre dérivé en a la valeur :

$$f'(a) = (\mathrm{Re}(f))'(a) + i(\mathrm{Im}(f))'(a).$$

Remarque. Dériver une fonction à valeurs complexes revient donc à dériver ses parties réelle et imaginaire, ce qui permet de conserver les formules habituelles de dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient et d'une composée.

Exercice 8. Étudier la dérivée de la fonction f qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $\cos(x) + i\sin(x)$.
<u>Solution :</u> f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car ses parties réelle et imaginaire le sont, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin(x) + i\cos(x)$.

Exercice 9. Étudier la dérivée de la fonction f qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $\dfrac{1}{3x + 2i}$.
<u>Solution :</u> f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\dfrac{3}{(3x + 2i)^2}$.

Proposition 2.6 (Dérivabilité et lien avec les fonctions constantes)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable de I dans $\mathbb{C}$. Alors f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.

Démonstration. La fonction f est constante sur I si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont aussi, donc si et seulement si leurs dérivées sont nulles sur I, donc si et seulement si f' est nulle sur I. □

Remarque. Le reste des résultats de monotonie ne se généralise par contre pas, puisque les relations de comparaison et les notions de positivité-négativité ne fonctionnent pas dans $\mathbb{C}$.

Proposition 2.7 (Dérivabilité de l'exponentielle sur $\mathbb{C}$)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et φ une fonction dérivable de I dans $\mathbb{C}$. Alors $f : x \mapsto \exp(\varphi(x))$ est dérivable sur I, et :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \varphi'(x)\exp(\varphi(x)).$$

Démonstration. On pose $a = \mathrm{Re}(\varphi)$ et $b = \mathrm{Im}(\varphi)$, ces fonctions sont dérivables sur I par hypothèse.
Par définition de l'exponentielle complexe, $\forall x \in I$,

$$\exp(\varphi(x)) = \exp(a(x))\exp(ib(x)) = \exp(a(x))\cos(b(x)) + i\exp(a(x))\sin(b(x)).$$

Donc $f = \exp(\varphi)$ est dérivable par composée de fonctions dérivables, et $\forall x \in I$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= a'(x)\exp(a(x))\cos(b(x)) - b'(x)\exp(a(x))\sin(b(x)) + i\left(a'(x)\exp(a(x))\sin(b(x)) + b'(x)\exp(a(x))\cos(b(x))\right) \\ &= \exp(a(x))\left(a'(x)\cos(b(x)) - b'(x)\sin(b(x)) + i\left(a'(x)\sin(b(x)) + b'(x)\cos(b(x))\right)\right). \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\varphi'(x)\exp(\varphi(x)) = (a'(x) + ib'(x))\exp(a(x))\exp(ib(x)) = \exp(a(x))\left((a'(x) + ib'(x))(\cos(b(x)) + i\sin(b(x))\right).$$

En développant, on trouve donc bien l'égalité annoncée. □

3 Interprétation géométrique des nombres complexes

3.1 Étude de $\frac{c-a}{b-a}$

Proposition 3.1 (Angles et distances)

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, avec $a \neq b$ et $a \neq c$. On note A, B, C leurs images dans le plan complexe. Alors

$$\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = \frac{AC}{AB},$$

où AC et AB représentent les distances entre les points. De plus, tout argument de $\frac{c-a}{b-a}$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ en radians.

Démonstration. Pour le premier résultat, il suffit de réutiliser les propriétés des modules : $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = \dfrac{|c-a|}{|b-a|} = \dfrac{AC}{AB}$.
Par ailleurs, si θ_c est un argument de $c - a$ et θ_b un argument de $b - a$, un argument de $\frac{c-a}{b-a}$ est $\theta_c - \theta_b$. Comme θ_c est une mesure de l'angle de $\overrightarrow{AC}$ et θ_b de l'angle $\overrightarrow{AB}$, on en déduit le deuxième résultat. □

Proposition 3.2 (Points alignés, droites orthogonales)

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, avec $a \neq b$ et $a \neq c$. On note A, B, C leurs images dans le plan complexe. Alors :

$$A, B, C \text{ sont alignés} \iff \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R},$$

$$(AB) \text{ et } (AC) \text{ sont orthogonales} \iff \frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}.$$

Démonstration. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0[\pi]$, donc si et seulement si les arguments de $\frac{c-a}{b-a}$ sont multiples de π, donc si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.
Les droites (AB) et (AC) sont orthogonales si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, donc si et seulement si les arguments de $\frac{c-a}{b-a}$ sont de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$. □

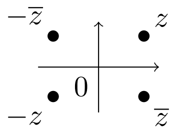
Exercice 10. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $z = x + iy$. Pour quelles valeurs de z le triangle de sommets A, B, C, d'affixes respectives $a = 2 - 3i$, $b = 1 + 2i$, $c = z$ est-il rectangle en A ?
Solution : On calcule le quotient :

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{x + iy - 2 + 3i}{1 + 2i - 2 + 3i} = \frac{x - 2 + i(y+3)}{-1 + 5i} = \frac{(x - 2 + i(y+3))(-1-5i)}{1 + 25} = \frac{-x + 2 + 5y + 15 + i(-y - 3 - 5x + 10)}{26}.$$

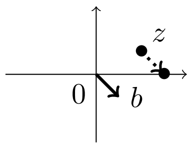
Donc $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{-x+5y+17+i(-y-5x+7)}{26}$. Donc $\dfrac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R} \iff -x+5y+17=0 \iff \begin{cases} x = 17+5t \\ y = t \in \mathbb{R} \end{cases}$.
Donc l'ensemble des z convenant est $\{17+5t+it | t \in \mathbb{R}\}$.

3.2 Applications $z \mapsto az+b$

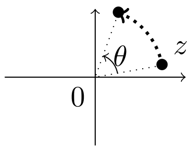
On a déjà vu plus tôt dans le chapitre que si $z \in \mathbb{C}$,
- $\overline{z}$ est le symétrique de z par rapport à l'axe des abscisses.
- $-z$ est le symétrique de z par rapport à 0.
- $-\overline{z}$ est le symétrique de z par rapport à l'axe des ordonnées.



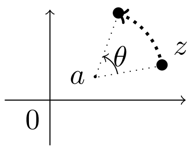
D'autres cas particuliers présentent un intérêt notable et doivent être reconnues :
- Les **translations de vecteur** $b \in \mathbb{C}$, qui s'écrivent sous la forme $z \mapsto z+b$.



- Les **rotations de centre** 0 **et d'angle** $\theta \in \mathbb{R}$, qui s'écrivent sous la forme $z \mapsto e^{i\theta}z$.

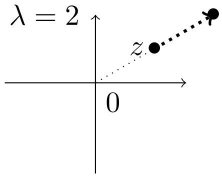


- Les **rotations de centre** $a \in \mathbb{C}$ **et d'angle** $\theta \in \mathbb{R}$, qui vérifient $z' - a = e^{i\theta}(z-a)$ où z' est l'image de z. L'application s'écrit donc sous la forme $z \mapsto a + e^{i\theta}(z-a)$.

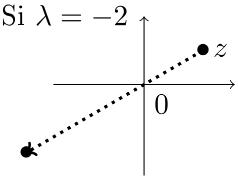


- Les **homothéties de centre** 0 **et de rapport** $\lambda \in \mathbb{R}^*$, qui s'écrivent sous la forme $z \mapsto \lambda z$.

Si $\lambda = 2$

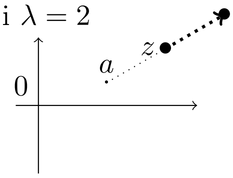


Si $\lambda = -2$

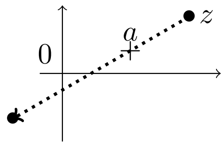


- Les **homothéties de centre** $a \in \mathbb{C}$ **et de rapport** $\lambda \in \mathbb{R}^*$, qui vérifient $z' - a = \lambda(z-a)$ où z' est l'image de z. L'application s'écrit donc sous la forme $z \mapsto a + \lambda(z-a)$.

Si $\lambda = 2$



Si $\lambda = -2$



Exercice 11. À quoi correspond l'application $f : z \mapsto iz + 3 - i$?
Solution : $i \neq 1$, donc f n'est pas une translation. Comme $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, il reste juste à déterminer le point fixe $c \in \mathbb{C}$. Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = z \iff iz+3-i = z \iff z(1-i) = 3-i \Longleftarrow z = \frac{3-i}{1-i} \iff z = \frac{(3-i)(1+i)}{2} \iff z = \frac{4+2i}{2} \iff z = 2+i.$$

Donc f est la rotation de centre $2+i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.