Applications linéaires en dimension finie

Cours de É. Bouchet – ECS1

15 avril 2020

Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Rang d'une application linéaire

Proposition (Image d'une base par une application linéaire)**.**

Soit E et F deux espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et on note $(e_1, \dots, e_n)$ une de ses bases. Alors une application linéaire f de E dans F est définie de manière unique par la donnée de la famille :

$$(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Démonstration. (démonstration à connaître) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ une famille d'éléments de F. On va montrer qu'il existe une unique application linéaire f telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = f_i$.

— Analyse : on suppose qu'il existe une telle application f. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$. Alors, par linéarité de f,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i f_i.$$

Ce qui définit entièrement f.

— Synthèse : soit f l'application de E dans F qui associe à tout vecteur $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ le vecteur $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f_i$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$, comme $e_i = 0e_1 + \cdots + 0e_{i-1} + 1e_i + 0e_{i+1} + \cdots + 0e_n$, on a $f(e_i) = f_i$. Montrons maintenant que f est linéaire : soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x, y) \in E^2$ avec $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. Alors $\lambda x + y = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + y_i) e_i$ et donc :

$$f(\lambda x + y) = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + y_i) f_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_i f_i + \sum_{i=1}^n y_i f_i = \lambda f(x) + f(y).$$

Donc f satisfait bien les conditions demandées.

D'où l'existence d'une unique application f qui convient. □

Exemple 1. Déterminer l'unique application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui vérifie $f((1,0)) = (2,1)$ et $f((0,1)) = (1,1)$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la linéarité de f donne :

$$f((x, y)) = f(x(1,0) + y(0,1)) = xf((1,0)) + yf((0,1)) = x(2,1) + y(1,1) = (2x + y, x + y).$$

Proposition (Famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$)**.**

Soit E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On suppose que E est de dimension finie et on note $(e_1, \dots, e_n)$ une de ses familles génératrices. Alors :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Démonstration. Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et comme la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E on peut écrire $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. On a donc, par linéarité de f :

$$y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i).$$

Donc $y \in \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ et $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$. L'inclusion réciproque étant évidente, on obtient l'égalité des ensembles. □

Remarque. C'est en particulier vrai lorsque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.

Exemple 2. Soit f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (4x-6y, 2x-3y)$. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.
$(1,0)$ et $(0,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$, donc

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f((1,0)), f((0,1))\right) = \mathrm{Vect}\left((4,2), (-6,-3)\right) = \mathrm{Vect}\left((4,2)\right),$$

où la dernière égalité provient de la relation $(-6,-3) = -\frac{3}{2}(4,2)$.

Définition (Rang d'une application linéaire)**.**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel. Soit f une application linéaire de E dans F. On appelle **rang** de f, et on note $\mathrm{rg}(f)$ la valeur :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim\left(\mathrm{Im}(f)\right).$$

Remarque. La fonction nulle est la seule application de rang 0.

Remarque. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ d'après ce qui précède et on a en particulier $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

2 Applications linéaires et familles de vecteurs

2.1 Images de familles de vecteurs

Proposition (Image d'une famille libre par une application injective)**.**

Soit E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire injective de E dans F. L'image par f d'une famille libre de E est une famille libre de F.

Remarque. Ce résultat ne nécessite pas de supposer que E est de dimension finie. Le cas $E = \{0\}$ est par contre un peu particulier, puisqu'il n'existe alors pas de famille libre de E.

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E, et f une application linéaire injective de E dans F. Montrons que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de F. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on suppose que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0_F.$$

On a alors, par linéarité de f, $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = 0_F$, càd $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in \mathrm{Ker}(f)$. Comme f est injective, $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, ce qui nous donne $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E$. Et comme $(e_1, \dots e_n)$ est une famille libre de E, les λ_i sont tous nuls. Donc $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre dans F. □

Proposition (Image d'une famille génératrice par une application surjective)**.**

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire surjective de E dans F. L'image par f d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.

Démonstration. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille génératrice de E et f une application linéaire surjective. Soit $y \in F$. Comme f est surjective, $y \in \mathrm{Im}(f)$ et il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Et comme $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice de E, il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Ce qui donne :

$$y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i).$$

Or $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) \in F$. Donc la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est génératrice de F. □

Proposition.

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et f une application linéaire de E dans F. Alors :

— Si f est bijective, l'image par f de toute base de E est une base de F.

— S'il existe une base de E dont l'image par f est une base de F, alors f est bijective.

Démonstration.

— Le premier point est une conséquence directe des deux résultats précédents.

— Réciproquement, supposons qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E dont l'image est une base de F.

  — Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $x \in E$ et on peut écrire $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ (puisque $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de E). Par linéarité de f, on obtient :

$$0_F = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i).$$

  Or les $f(e_i)$ sont une famille libre de F. Donc les scalaires x_i sont tous nuls. Donc $x = 0_E$ et $\mathrm{Ker}(f) \subset \{0_E\}$. La deuxième inclusion étant évidente, on en déduit que f est injective.

  — Soit $y \in F$, alors on peut écrire $y = \sum_{i=1}^n y_i f(e_i)$ (puisque $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de F). Alors, par linéarité de f,

$$y = \sum_{i=1}^n y_i f(e_i) = f\left(\sum_{i=1}^n y_i e_i\right).$$

  Donc $y \in \mathrm{Im}(f)$ et $F \subset \mathrm{Im}(f)$. La deuxième inclusion étant évidente, on en déduit que f est surjective.

  Donc f est bijective.

□

2.2 Espaces isomorphes et dimension

Proposition.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est de dimension n si et seulement si il est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Démonstration.

— Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Alors il possède une base $(e_1, \ldots, e_n)$. Soit φ l'application linéaire qui à tout e_i associe le i-ème terme de la base canonique de $\mathbb{K}^n$. L'application φ est linéaire par construction, et l'image de la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Donc par le résultat précédent elle est bijective. Donc E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

— Réciproquement, soit E un espace vectoriel isomorphe à $\mathbb{K}^n$. Il existe donc un isomorphisme φ de $\mathbb{K}^n$ dans E. Comme φ est bijective, l'image par φ de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est une base de E. Donc E possède une base à n éléments et $\dim(E) = n$.

□

Corollaire.

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Ils sont isomorphes si et seulement si

$$\dim(E) = \dim(F).$$

3 Théorème du rang

3.1 Énoncé du théorème

Théorème (Théorème du rang)**.**

Soit E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On suppose que E est de dimension finie, alors $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$, c'est-à-dire

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f).$$

Démonstration. (démonstration à connaître) $\mathrm{Ker}(f) \subset E$ qui est de dimension finie, donc c'est également un espace de dimension finie. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$ (dans le cas où $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_E\}$). C'est une famille libre de E, donc (théorème de la base incomplète) on peut la compléter en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E (si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, on prend directement une base de E). On sait alors que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Et comme $f(e_1) = \cdots = f(e_k) = 0_F$ (ces éléments étant dans le noyau de f), on obtient que $(f(e_{k+1}), \dots, f(e_n))$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Il nous reste maintenant à montrer que cette famille est libre pour pouvoir conclure que c'est une base. Soit $(\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n)$ des scalaires, on suppose que

$$\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0_F.$$

Comme f est linéaire, on en déduit que $f\left(\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0_F$. Donc $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i \in \mathrm{Ker}(f)$, dont une base est $(e_1, \dots, e_k)$, et il existe des scalaires $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ tels que :

$$\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i.$$

Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, et en particulier une famille libre, on en déduit que tous les λ_i et α_i sont nuls. On a donc montré que $(e_1, \dots, e_k)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$, et $(f(e_{k+1}), \dots, f(e_n))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$. Ce qui nous donne que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = k$, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n - k$ et en particulier :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

□

3.2 Théorème du rang et bijections

Proposition.

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = \dim(F)$ et f une application linéaire de E dans F. Alors :

$$f \text{ est injective } \iff f \text{ est surjective } \iff f \text{ est bijective } \iff \mathrm{rg}(f) = \dim(F).$$

Démonstration. Le théorème du rang donne

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E) = \dim(F).$$

En particulier,

— Si f est injective, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$, donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F)$. Or $\mathrm{Im}(f) \subset F$, donc $\mathrm{Im}(f) = F$ et f est surjective.

— Si f est surjective, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim F$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$, càd $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ et f est injective. Donc f est bijective.

— Si f est bijective, $\mathrm{Im}(f) = F$ et donc $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$.

— Si $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$, alors $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$, càd $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ et f est injective.

On a ainsi montré toutes les équivalences. □

Corollaire.

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = \dim(F)$, f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans E. Alors :

— Si $f \circ g = Id_F$, f est bijective et $f^{-1} = g$.

— Si $g \circ f = Id_E$, f est bijective et $f^{-1} = g$.

Démonstration. (démonstration à connaître)

— On suppose que $f \circ g = Id_F$. Soit $x \in F$, alors $f \circ g(x) = x$, donc $f(g(x)) = x$. Donc x admet un antécédent (en l'occurrence $g(x)$) par f, et $x \in \mathrm{Im}(f)$. Donc $F \subset \mathrm{Im}(f)$. L'autre inclusion étant directe, on obtient $\mathrm{Im}(f) = F$, donc f est surjective. Par la proposition précédente, puisqu'il y a égalité des dimensions, f est également bijective. De plus, comme $f \circ g = Id_F$, on trouve en composant par f^{-1} à gauche que $g = f^{-1}$.

— On suppose que $g \circ f = Id_E$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $f(x) = 0_F$ et $g \circ f(x) = x$. Par linéarité de g, on obtient $g \circ f(x) = g(0_F) = 0_E$. Donc $x = 0_E$. Donc $\mathrm{Ker}(f) \subset \{0_E\}$. L'autre inclusion étant directe, on obtient $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, donc f est injective. Par la proposition précédente, puisqu'il y a égalité des dimensions, f est également bijective. De plus, comme $g \circ f = Id_E$, on trouve en composant par f^{-1} à droite que $g = f^{-1}$.

□

4 Formes linéaires

Définition (Forme linéaire)**.**

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Exemple 3. Soit C l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues sur $[0,1]$. L'application $f \to \int_0^1 f(t)dt$ est une forme linéaire sur C.

Proposition.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et F un sous-espace de E. Alors F est un hyperplan de E si et seulement si c'est le noyau d'une forme linéaire sur E non nulle.

Démonstration.

— Supposons que $F = \mathrm{Ker}(\varphi)$, où φ est une forme linéaire sur E non nulle. $\varphi \neq 0$, donc $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \geqslant 1$. Comme φ est une forme linéaire, on a de plus $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{K}$, et donc $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{K}$. Le théorème du rang donne alors :

$$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(\varphi) = \dim(E) - 1.$$

F est donc un hyperplan de E.

— Réciproquement, supposons que F est un hyperplan de E. Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de F, c'est une famille libre de E, on peut donc (théorème de la base incomplète) la compléter en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Soit φ l'application linéaire définie de E dans $\mathbb{K}$ en posant $\varphi(e_i) = 0$ si $i \neq n$ et $\varphi(e_n) = 1$. Montrons que $F = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

  — Soit $x \in F$, alors il existe des scalaires $(x_1, \dots, x_{n-1})$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i$. On a alors

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i 0 = 0,$$

  donc $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Donc $F \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$.

  — Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. En particulier, $x \in E$, donc il existe des scalaires $(x_1, \dots, x_n)$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, et

$$0 = \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = x_n \varphi(e_n) = x_n.$$

  Donc $x_n = 0$, et $x = \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i \in F$. Donc $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset F$.

Par double inclusion, on a bien montré que $F = Ker(\varphi)$. Enfin, $\varphi(e_n) = 1$, donc φ est non nulle.
Rmq : on pouvait également utiliser le théorème du rang à la place de l'inclusion réciproque.

□

Exemple 4. Soit f l'application linéaire définie de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$f(P) = P(0).$$

f est une forme linéaire. Déterminer l'hyperplan qui correspond à son noyau.
Soit $P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$P \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(P) = 0 \iff c = 0 \iff P(X) = aX^2 + bX \iff P \in \mathrm{Vect}(X, X^2).$$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(X, X^2) = \{aX^2 + bX | (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$, qui est bien de dimension $2 = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - 1$.
Variantes : on pouvait aussi vérifier que X et X^2 sont dans le noyau, donc $\mathrm{Vect}(X, X^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et utiliser l'égalité des dimensions pour conclure. Autre possibilité : raisonner par équivalences, mais en passant par une forme factorisée du polynôme.