Applications linéaires

Cours de É. Bouchet – ECS1

6 avril 2020

Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Applications linéaires

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition (Application linéaire)**.**

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, et f une application de E dans F. On dit que f est une **application linéaire** de E dans F si elle vérifie :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Proposition (Valeur en 0)**.**

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, et f une application linéaire de E dans F. Alors $f(0_E) = 0_F$.

Démonstration. La linéarité de f donne :

$$f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E).$$

En retranchant $f(0_E)$ aux deux membres de cette égalité, on obtient que $f(0_E) = 0_F$. □

Proposition (Caractérisation d'une application linéaire)**.**

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. La fonction f est une application linéaire de E dans F si et seulement si $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

Démonstration.

— Supposons que f est une application linéaire. Alors, $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$f(\lambda x + y) = f(\lambda x) + f(y) = \lambda f(x) + f(y),$$

d'où le résultat.

— Réciproquement, supposons que la condition est vérifiée. Soit $(x,y) \in E^2$,

$$f(x+y) = f(1x + y) = 1f(x) + f(y) = f(x) + f(y),$$

on en déduit donc en particulier que $f(0_E) = 0_F$. De plus, si $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$f(\lambda x) = f(\lambda x + 0_E) = \lambda f(x) + 0_F = \lambda f(x).$$

D'où le résultat.

□

Exemple 1. Montrer que l'application $P \to P'$ est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.
En effet, soit P et Q deux polynômes, et λ un réel,

$$(\lambda P + Q)'(X) = \lambda P'(X) + Q'(X).$$

D'où le résultat.

Exemple 2. Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ?

1. La fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $f((x,y)) = x+y+1$.
2. La fonction g définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $g((x,y)) = x+y$.
3. La fonction h définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $h((x,y)) = x \times y$.

1. $f((0,0)) = 1 \neq 0$, donc f n'est pas une application linéaire.
2. Soit (x,y) et (x',y') deux éléments de $\mathbb{R}^2$, et λ un réel.

$$g\left(\lambda(x,y)+(x',y')\right) = g\left((\lambda x + x', \lambda y + y')\right) = \lambda x + x' + \lambda y + y' = \lambda g((x,y)) + g\left((x',y')\right).$$

   Donc g est une application linéaire.
3. $h((0,1)+(1,0)) = h((1,1)) = 1 \neq 0+0 = h((0,1)) + h((1,0))$. Donc h n'est pas une application linéaire.

Exemple 3. Montrer que l'application f définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, par $f(M) = {}^tM$ est une application linéaire.
Soit M et N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et λ un complexe. On a :

$$f(\lambda M + N) = {}^t(\lambda M + N) = \lambda\, {}^tM + {}^tN = \lambda f(M) + f(N).$$

Donc f est bien une application linéaire.

Proposition (Espace vectoriel des applications linéaires)**.**

L'ensemble des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est un espace vectoriel. On le note $\mathcal{L}(E,F)$.

Démonstration. On va montrer que c'est un sous-espace vectoriel de F^E (dont on admet que c'est un espace vectoriel car E et F en sont, même s'il ne figure pas explicitement dans les espaces vectoriels de référence).

— L'application nulle est linéaire, donc $\mathcal{L}(E,F)$ n'est pas vide.

— Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $(x,y) \in E^2$, et $\mu \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned}(\lambda f + g)(\mu x + y) &= \lambda f(\mu x + y) + g(\mu x + y)\\ &= \lambda\mu f(x) + \lambda f(y) + \mu g(x) + g(y)\\ &= \mu(\lambda f(x) + g(x)) + \lambda f(y) + g(y)\\ &= \mu(\lambda f + g)(x) + (\lambda f + g)(y)\end{aligned}$$

Donc $(\lambda f + g) \in \mathcal{L}(E,F)$, et $\mathcal{L}(E,F)$ est stable par combinaison linéaire.
Donc c'est un sous-espace vectoriel de F^E. Donc c'est un espace vectoriel. □

1.2 Composition des applications linéaires

Proposition (Composée de deux applications linéaires)**.**

Soit E, F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Si f est une application linéaire de E dans F, et g est une application linéaire de F dans G, alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Démonstration. Soit $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$g \circ f(\lambda x + y) = g(\lambda f(x) + f(y)) = \lambda g \circ f(x) + g \circ f(y).$$

D'où la linéarité de $g \circ f$. □

Proposition (Distributivité de la composition)**.**

Soit E, F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Si f et g sont des applications de E dans F, et h est une application linéaire de F dans G, alors $h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$.

Démonstration. $\forall x \in E$, $h \circ (f + g)(x) = h(f(x) + g(x)) = h \circ f(x) + h \circ g(x)$. D'où le résultat. □

Remarque. On savait déjà que si f est une application de E dans F, et g et h sont des applications de F dans G, alors $(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$, sans condition de linéarité.

1.3 Noyau et image

Définition (Noyau d'une application linéaire)**.**

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, et f une application linéaire de E dans F. On appelle **noyau** de f, et on note $\mathrm{Ker}(f)$, le sous-ensemble de E défini par :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E | f(x) = 0_F\}.$$

Exemple 4. Soit g l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $g((x, y)) = x + y$. Déterminer son noyau.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) \in \mathrm{Ker}(g) \iff g((x, y)) = 0 \iff x + y = 0 \iff (x, y) = x(1, -1) \iff (x, y) \in \mathrm{Vect}((1, -1)).$$

On a donc $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Vect}((1, -1)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0\}$.

Proposition.

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, et f une application linéaire de E dans F. Le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.
- $f(0_E) = 0_F$ puisque f est une application linéaire, donc $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$, et cet ensemble est non vide.
- Soit $(x, y) \in \mathrm{Ker}(f)^2$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. La linéarité de f donne :

  $$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) = \lambda 0_F + 0_F = 0_F.$$

  Donc $\lambda x + y \in \mathrm{Ker}(f)$, d'où le résultat.

□

Proposition (Noyau et injectivité).

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, et f une application linéaire de E dans F. La fonction f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Démonstration. (démonstration à connaître)

— Supposons que f est injective. Alors 0_F a au plus un antécédent par f, donc $\mathrm{Ker}(f)$ a au plus un élément. Or $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$ puisque f est linéaire. Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

— Réciproquement, supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. Soit $(x, y) \in E^2$, supposons que $f(x) = f(y)$. Alors par linéarité, $f(x - y) = 0_F$, et $x - y \in \mathrm{Ker}(f)$, donc $x - y = 0_E$ et $x = y$. Donc f est injective.

□

Remarque. On peut également noter que $\mathrm{Ker}(f) = E$ si et seulement si f est l'application nulle.

Définition (Image d'une application linéaire).

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, et f une application linéaire de E dans F. On appelle **image** de f, et on note $\mathrm{Im}(f)$, le sous-ensemble de F défini par :

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in F | \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x)\}.$$

Exemple 5. Soit g l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $g((x, y)) = x + y$. Déterminer son image.
Il est immédiat que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathbb{R}$. Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R}$, $x = g((x, 0)) \in \mathrm{Im}(g)$. On a donc montré par double inclusion que :

$$\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}.$$

Proposition.

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, et f une application linéaire de E dans F. L'image $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration. (démonstration à connaître)

— $f(0_E) = 0_F$ puisque f est une application linéaire, donc $0_F \in \mathrm{Im}(f)$ et cet ensemble est non vide.

— Soit $(x, y) \in \mathrm{Im}(f)^2$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors il existe a et b dans E tels que $f(a) = x$ et $f(b) = y$. On a donc :

$$f(\lambda a + b) = \lambda f(a) + f(b) = \lambda x + y.$$

Donc $\lambda x + y \in \mathrm{Im}(f)$, d'où le résultat.

□

Proposition (Image et surjectivité).

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, et f une application linéaire de E dans F. La fonction f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Démonstration.

- Supposons que f est surjective. Alors tout élément de F a un antécédent par f, donc $F \subset \mathrm{Im}(f)$. L'inclusion réciproque étant immédiate, on a $\mathrm{Im}(f) = F$.
- Réciproquement, supposons que $\mathrm{Im}(f) = F$. Soit $x \in F$. Alors, $x \in \mathrm{Im}(f)$, et donc x a un antécédent par f. Donc f est surjective.

$\square$

Remarque. On peut également noter que $\mathrm{Im}(f) = \{0_F\}$ si et seulement si f est l'application nulle.

Exemple 6. On considère l'application linéaire $f : P \to P'$ définie de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$. Trouver son noyau et son image. Est-elle injective ? surjective ?

- On commence par chercher le noyau. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$P \in \mathrm{Ker}(f) \iff P' = 0 \iff \deg(P) = 0 \text{ ou } -\infty \iff P \in \mathbb{R}_0[X].$$

  Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[X]$. Comme $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$, l'application f n'est pas injective.
- Cherchons à présent l'image. Il est direct que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}[X]$. Réciproquement, soit $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. On pose $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k+1} X^{k+1}$, alors $f(P) = Q$, et $Q \in \mathrm{Im}(f)$. Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}[X]$, et l'application f est surjective.

2 Cas particuliers

2.1 Isomorphismes

Définition (Isomorphisme)**.**

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, et f une application linéaire de E dans F. On dit que f est un **isomorphisme** de E dans F lorsqu'elle est bijective de E dans F.

Exemple 7. L'application identité de E, notée Id_E et définie par $x \to x$ est un isomorphisme de E.

Proposition (Composée d'isomorphismes)**.**

Soit E, F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Si f est un isomorphisme de E dans F, et g est un isomorphisme de F dans G, alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E dans G, et on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration. On commence par remarquer que la composée de deux applications linéaires est une application linéaire. Soit $z \in G$ et $x \in E$. Puisque g et f sont des bijections,

$$g \circ f(x) = z \iff g(f(x)) = z \iff f(x) = g^{-1}(z) \iff x = f^{-1}(g^{-1}(z)) \iff x = f^{-1} \circ g^{-1}(z).$$

Donc tout élément $z \in G$ admet un unique antécédent $x \in E$ par $g \circ f$, qui est donc une bijection. Donc $g \circ f$ est un isomorphisme de E dans G. La relation précédente nous donne de plus que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. $\square$

Définition (Espaces vectoriels isomorphes)**.**

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On dit que E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de E dans F.

2.2 Endomorphismes

Définition (Endomorphisme)**.**

Soit E un espace vectoriel. On appelle **endomorphisme** de E toute application linéaire de E dans E.

Proposition (Espace vectoriel des endomorphismes)**.**

L'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel E est un espace vectoriel. On le note $\mathcal{L}(E)$.

Démonstration. $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$, c'est donc un cas particulier d'un résultat déjà rencontré. □

Définition (Puissances d'un endomorphisme)**.**

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $f^0 = Id_E$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{p+1} = f^p \circ f = f \circ f^p$.

Exemple 8. L'application $f : P \to P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. On peut donc définir ses puissances : pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $f^p(P(X)) = P^{(p)}(X)$.

Proposition (Formule du binôme de Newton)**.**

Soit E un espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}.$$

Démonstration. Cette formule se montre par récurrence, de la même façon que la formule du binôme de Newton pour les matrices. □

2.3 Projecteurs

Dans toute cette partie, on notera E un espace vectoriel, et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Pour tout vecteur $x \in E$, on note (x_1, x_2) l'unique couple de $F_1 \times F_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.

Définition (Projecteur, projecteurs associés)**.**

On appelle **projecteur** de E sur F_1 parallèlement à F_2 l'application p définie pour tout x de E par

$$p(x) = x_1.$$

On appelle projecteur de E sur F_2 parallèlement à F_1 l'application q définie pour tout x de E par

$$q(x) = x_2.$$

Les projecteurs p et q sont appelés **projecteurs associés**.

Exemple 9. On sait déjà que $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}((1,0,0),(0,1,0)) \oplus \text{Vect}((0,0,1))$, ce qui correspond pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ à la décomposition $(x,y,z) = (x,y,0) + (0,0,z)$. Soit f et g les applications définies de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par

$$f((x,y,z)) = (x,y,0) \quad \text{et} \quad g((x,y,z)) = (0,0,z).$$

Alors f et g sont deux projecteurs associés. Plus exactement,
- f est le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur $\text{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$ parallèlement à $\text{Vect}((0,0,1))$.
- g est le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur $\text{Vect}((0,0,1))$ parallèlement à $\text{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$.

Exemple 10. On sait déjà que $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}((1,0,0),(0,1,0)) \oplus \text{Vect}((1,0,1))$, ce qui correspond pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ à la décomposition $(x,y,z) = (x-z,y,0) + (z,0,z)$. Soit f et g les applications définies de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par

$$f((x,y,z)) = (x-z,y,0) \quad \text{et} \quad g((x,y,z)) = (z,0,z).$$

Alors f et g sont deux projecteurs associés. Plus exactement,
- f est le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur $\text{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$ parallèlement à $\text{Vect}((1,0,1))$.
- g est le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur $\text{Vect}((1,0,1))$ parallèlement à $\text{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$.

Proposition.

Tout projecteur de E est un endomorphisme de E.

Démonstration. Soit p le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2, où $E = F_1 \oplus F_2$. Il est immédiat que p est à valeurs dans E, il suffit donc de montrer que c'est une application linéaire. Soit $(x,y) \in E^2$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. On suppose que les décompositions de x et y s'écrivent $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ avec $(x_1,y_1) \in F_1^2$ et $(x_2,y_2) \in F_2^2$. Alors, $\lambda x + y = (\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2)$, avec $\lambda x_1 + y_1 \in F_1$, $\lambda x_2 + y_2 \in F_2$ et on a :

$$p(\lambda x + y) = \lambda x_1 + y_1 = \lambda p(x) + p(y).$$

D'où le résultat. □

Proposition (Noyau et image d'un projecteur)**.**

Soit p le projecteur de E sur F_1 parallèlement à F_2. On a :
- $F_1 = \text{Im}(p) = \text{Ker}(p - Id_E)$,
- $F_2 = \text{Ker}(p)$.

Démonstration. (démonstration à connaître)
- Soit $x \in F_1$, alors $x = x + 0_E$, où $(x, 0_E) \in F_1 \times F_2$. Donc $p(x) = x$. On en déduit que $x \in \text{Im}(p)$ et $F_1 \subset \text{Im}(p)$. Réciproquement, si $x \in \text{Im}(p)$, il existe $z \in E$ tel que $x = p(z)$. On décompose z comme $z_1 + z_2$, avec $(z_1,z_2) \in F_1 \times F_2$. Alors $x = z_1 \in F_1$ et $\text{Im}(p) \subset F_1$. D'où $F_1 = \text{Im}(p)$.
- Soit $x \in F_1$, on obtient comme dans le raisonnement précédent que $p(x) = x$ et donc $(p - Id_E)(x) = 0_E$. Donc $F_1 \subset \text{Ker}(p - Id_E)$. Réciproquement, soit $x \in \text{Ker}(p - Id_E)$. Alors, $p(x) - x = 0_E$ et donc $p(x) = x$. Donc $x \in \text{Im}(p) = F_1$ et $\text{Ker}(p - Id_E) \subset F_1$. D'où $F_1 = \text{Ker}(p - Id_E)$.
- Soit $x \in F_2$, alors $x = 0_E + x$, où $(0_E, x) \in F_1 \times F_2$. Donc $p(x) = 0_E$, $x \in \text{Ker}(p)$ et $F_2 \subset \text{Ker}(p)$. Réciproquement, si $x \in \text{Ker}(p)$, $p(x) = 0_E$. On décompose x comme $x_1 + x_2$, avec $(x_1,x_2) \in F_1 \times F_2$. La relation précédente donne alors $x_1 = 0_E$, on en déduit $x = x_2 \in F_2$. D'où $\text{Ker}(p) \subset F_2$ et par double inclusion $F_2 = \text{Ker}(p)$.

□

Proposition (Caractérisation des projecteurs associés).

Soit p et q deux projecteurs de E. Ce sont des projecteurs associés si et seulement si ils vérifient :

$$p + q = Id_E \quad \text{et} \quad p \circ q = q \circ p = 0.$$

Proposition (Caractérisation des projecteurs).

Soit f un endomorphisme de E. La fonction f est un projecteur si et seulement si $f \circ f = f$.

Démonstration.

— Supposons que f est un projecteur (sur F_1 parallèlement à F_2, avec $E = F_1 \oplus F_2$). Soit $x \in E$, qu'on décompose en $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$. Alors $f(x) = x_1$, et comme $x_1 = x_1 + 0_E$ avec $x_1 \in F_1$ et $0_E \in F_2$ cela donne :

$$f \circ f(x) = f(x_1) = x_1 = f(x).$$

Cela étant vrai pour tout $x \in E$, on a bien $f \circ f = f$.

— Réciproquement, supposons que $f \circ f = f$. Montrons que f est le projecteur sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$. Pour cela, il faut commencer par montrer que ces deux espaces vectoriels sont bien supplémentaires : soit $x \in E$, on va montrer qu'il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathrm{Im}(f) \times \mathrm{Ker}(f)$ tel que $x = x_1 + x_2$.

  — Analyse : supposons qu'un tel couple existe. Comme $x_1 \in \mathrm{Im}(f)$, on peut trouver $y \in E$ tel que $f(y) = x_1$, et donc $x = f(y) + x_2$. En appliquant f de nouveau, on trouve par linéarité :

$$f(x) = f \circ f(y) + f(x_2) = f \circ f(y) = f(y) = x_1.$$

  Donc nécessairement, $x_1 = f(x)$ et $x_2 = x - f(x)$.

  — Synthèse : soit $x \in E$. On pose $x_1 = f(x)$ et $x_2 = x - f(x)$. Il est immédiat que $x_1 \in \mathrm{Im}(f)$, par ailleurs :

$$f(x_2) = f(x - f(x)) = f(x) - f \circ f(x) = f(x) - f(x) = 0_E,$$

  donc $x_2 \in \mathrm{Ker}(f)$. Comme de plus $x = f(x) + (x - f(x)) = x_1 + x_2$, cette décomposition convient bien.

Donc $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans E. Soit $x \in E$, qu'on décompose en $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{Im}(f)$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(x_2) = 0_E$ et $\exists y \in E$ tel que $f(y) = x_1$, on a donc puisque $f \circ f = f$:

$$f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f \circ f(y) + 0_E = f(y) = x_1.$$

Donc f est bien le projecteur de E sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.

□

Exemple 11. Soit f l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (4x - 6y, 2x - 3y)$. Montrer que f est un projecteur, en précisant ses caractéristiques.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$f \circ f((x,y)) = f((4x-6y, 2x-3y)) = (16x - 24y - 12x + 18y, 8x - 12y - 6x + 9y) = (4x - 6y, 2x - 3y) = f((x,y)).$$

Donc $f \circ f = f$, et f est un projecteur. On va maintenant chercher son noyau et son image :

— Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f((x,y)) = (0,0) \\
&\iff (4x - 6y, 2x - 3y) = (0,0) \\
&\iff 2x - 3y = 0 \\
&\iff (x,y) = \frac{x}{3}(3,2) \\
&\iff (x,y) \in \mathrm{Vect}((3,2)),
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne par double inclusion $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((3,2))$.

— Soit $u \in \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$u = f((x,y)) = (4x - 6y, 2x - 3y) = x(4,2) + y(-6,-3).$$

Or $(4,2) = f((1,0)) \in \mathrm{Im}(f)$ et $(-6,-3) = f((0,1)) \in \mathrm{Im}(f)$. Donc $((4,2),(-6,-3))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((4,2),(-6,-3))$.
On cherche maintenant à simplifier au maximum cette expression. On remarque que $(-6,-3) = -\frac{3}{2}(4,2)$, donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((4,2))$.

Donc f est le projecteur sur $\mathrm{Vect}((4,2))$ parallèlement à $\mathrm{Vect}((3,2))$.
Rmq : pour l'image, comme il s'agit d'un projecteur, on pouvait aussi chercher $\mathrm{Ker}(f - Id)$.