

# Applications

Cours de É. Bouchet – PCSI

12 octobre 2022

## Table des matières

<b>1 Généralités</b>	<b>2</b>
1.1 Définition, représentation . . . . .	2
1.2 Image directe, image réciproque . . . . .	2
1.3 Quelques cas particuliers . . . . .	3
<b>2 Opérations sur les applications</b>	<b>4</b>
2.1 Restriction et prolongement . . . . .	4
2.2 Composée de deux applications . . . . .	4
<b>3 Injection, surjection, bijection</b>	<b>4</b>
3.1 Injection . . . . .	4
3.2 Surjection . . . . .	6
3.3 Bijection . . . . .	7

# 1 Généralités

## 1.1 Définition, représentation

### Définition 1.1 (Application, fonction, image, antécédent)

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides. On dit que  $f$  est une **application** ou **fonction** définie de l'ensemble de départ  $E$  dans l'ensemble d'arrivée  $F$  lorsqu'elle associe à tout élément  $x$  de  $E$  un et un seul élément  $y$  de  $F$ .

Cet élément  $y$  unique, noté  $f(x)$ , est l'**image** de  $x$  par  $f$ . L'élément  $x$  est un **antécédent** de  $y$  par  $f$ .

On note  $\mathcal{F}(E, F)$  ou  $F^E$  l'ensemble des applications de  $E$  dans  $F$ .

**Remarque.** Écrit en quantificateurs, cela donne :  $\forall x \in E, \exists ! y \in F$  tel que  $y = f(x)$ .

**Exemple 1.**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x^2$  est une application de l'ensemble de départ  $\mathbb{R}$  dans l'ensemble d'arrivée  $\mathbb{R}$ .

L'image de 2 par  $f$  est 4. Les antécédents de 4 par  $f$  sont 2 et  $-2$ .

**Remarque.** Attention  $f(x)$  représente seulement un élément de  $F$  (la valeur de la fonction  $f$  au point  $x$ ). Si on veut parler de la fonction, il faut écrire  $f$  (sans  $x$ ) ou  $x \mapsto f(x)$ .

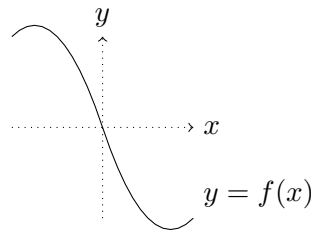
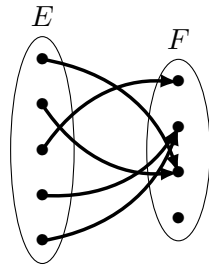
**Exercice 2.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 3x^2 + 5$ . Déterminer les antécédents de 6 par  $f$ .

Solution : Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = 6 \iff 3x^2 + 5 = 6 \iff x^2 = \frac{1}{3} \iff x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Les antécédents de 6 par  $f$  sont donc  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  et  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**Remarque.** On peut représenter une application  $f$  de deux manières différentes, sous forme de « patates » avec  $x$  d'un côté et  $f(x)$  de l'autre, ou sous forme de graphe en positionnant les points  $(x, f(x))$  dans le plan :



## 1.2 Image directe, image réciproque

### Définition 1.2 (Image directe)

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

— On appelle **image (directe) de  $f$**  l'ensemble  $f(E) = \{f(x) | x \in E\}$ .

— Si  $I \subset E$ , on appelle **image (directe) de  $I$  par  $f$**  l'ensemble :  $f(I) = \{f(x) | x \in I\}$ .

**Remarque.**  $f(I)$  contient toutes les images par  $f$  des éléments de  $I$ .

**Remarque.**  $f(E)$  ne doit pas être confondu avec l'espace d'arrivée  $F$  :  $f(E) \subset F$ , mais rien n'impose que les éléments de l'espace d'arrivée soient tous atteints par l'application.

**Remarque.** Passer par une représentation graphique de l'application peut aider à déterminer les images directes.

**Exercice 3.** Soit  $f$  la fonction définie de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$  par  $f(n) = 2n$ . Déterminer  $f(\mathbb{Z})$  et  $f(\llbracket 3, 6 \rrbracket)$ .

Solution :  $f(\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}$  et  $f(\llbracket 3, 6 \rrbracket) = \{6, 8, 10, 12\}$ .

**Exercice 4.** Soit  $g$  la fonction définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = |x|$ . Déterminer  $g(\mathbb{R})$  et  $g([-3, -1])$ .

Solution :  $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$  et  $g([-3, -1]) = ]1, 3]$ .

### Définition 1.3 (Image réciproque)

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . Soit  $A \subset F$ . On appelle **image réciproque de  $A$  par  $f$**  l'ensemble  $f^{\text{rec}}(A) = \{x \in E \mid f(x) \in A\}$ .

**Remarque.** La notation  $f^{\text{rec}}$  est provisoire, on la remplacera par  $f^{-1}$  en fin de chapitre, après avoir évacué toute ambiguïté possible.

**Remarque.**  $f^{\text{rec}}(A)$  contient les antécédents par  $f$  des éléments de  $A$ . En particulier, si  $a \in F$ ,  $f^{\text{rec}}(\{a\})$  contient les antécédents de  $a$  par  $f$ .

**Remarque.** Soit  $x \in E$ ,  $x \in f^{\text{rec}}(A) \iff f(x) \in A$ .

**Remarque.** Passer par une représentation graphique peut aider à déterminer les images réciproques.

**Exercice 5.** Soit  $f$  la fonction définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$ . Déterminer  $f^{\text{rec}}([-2, -1])$ ,  $f^{\text{rec}}(\mathbb{R}_-)$ ,  $f^{\text{rec}}([1, 4])$ .

Solution :  $f^{\text{rec}}([-2, -1]) = \emptyset$ ,  $f^{\text{rec}}(\mathbb{R}_-) = \{0\}$ ,  $f^{\text{rec}}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$ .

## 1.3 Quelques cas particuliers

### Définition 1.4 (Famille d'éléments d'un ensemble)

Soit  $E$  un ensemble et  $I$  un ensemble fini ou dénombrable. On appelle **famille d'éléments de  $E$  indexée par  $I$**  toute application de  $I$  dans  $E$ .

On note  $E^I$  l'ensemble des familles d'éléments de  $E$  indexées par  $I$ .

**Remarque.** Plutôt que d'utiliser une notation de fonction, on utilise une notation de type  $(x_i)_{i \in I}$  pour les familles d'éléments indexées par  $I$ .

**Exemple 6.** Une suite à valeurs réelles est une famille d'éléments de  $\mathbb{R}$  indexée par  $\mathbb{N}$ , on note donc  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  l'ensemble des suites réelles.

### Définition 1.5 (Application identité)

Soit  $E$  un ensemble, on appelle **identité de  $E$**  l'application  $\text{id}_E$  définie de  $E$  dans  $E$  par :

$$\forall x \in E, \quad \text{id}_E(x) = x.$$

### Définition 1.6 (Fonction indicatrice)

Soit  $E$  un ensemble et  $A$  une partie de  $E$ . On appelle **fonction indicatrice de  $A$**  la fonction  $\mathbb{1}_A$  définie de  $E$  dans  $\{0, 1\}$  par :

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

**Exemple 7.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . On a alors :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ .

## 2 Opérations sur les applications

### 2.1 Restriction et prolongement

#### Définition 2.1 (Restriction, prolongement)

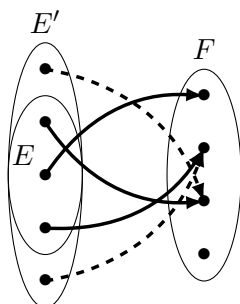
Soit  $E, E'$  et  $F$  des ensembles non vides tels que  $E \subset E'$ . Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ , et  $g$  une application de  $E'$  dans  $F$ .

On dit que  $f$  est **la restriction** de  $g$  à  $E$ , et que  $g$  est **un prolongement** de  $f$  à  $E'$ , lorsque :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = g(x).$$

**Remarque.** On note  $g|_E$  la restriction de  $g$  à l'ensemble  $E$ .

**Exemple 8.** Représentation graphique des applications  $f$  et  $g$  :



**Exemple 9.** Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ,  $g : [0, +\infty[ \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ .

Alors,  $g$  est la restriction de  $f$  à  $[0, +\infty[$ .  $f$  est un prolongement de  $g$  à  $\mathbb{R}$ .

Un autre prolongement de  $g$  à  $\mathbb{R}$  est :  $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  telle que  $h(x) = x^2$  si  $x \geq 0$ ,  $h(x) = 0$  si  $x < 0$ .

### 2.2 Composée de deux applications

#### Définition 2.2 (Composée)

Soit  $D_f, A_f, D_g$  et  $A_g$  des ensembles non vides. Soit  $f$  une application définie de  $D_f$  dans  $A_f$  et  $g$  une application définie de  $D_g$  dans  $A_g$ . Si  $A_f \subset D_g$ , on appelle **composée** de  $f$  par  $g$ , notée  $g \circ f$ , l'application définie de  $D_f$  dans  $A_g$  par :

$$\forall x \in D_f, \quad g \circ f(x) = g(f(x)).$$

**Remarque.** Attention,  $g \circ f$  peut être défini sans que  $f \circ g$  le soit. En effet, les conditions de bonne définition sont différentes : il faut  $A_f \subset D_g$  pour définir  $g \circ f$  et  $A_g \subset D_f$  pour définir  $f \circ g$ .

**Exemple 10.** Soit  $f : [0, +\infty[ \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ,  $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ .

$\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$ , donc  $g \circ f$  est bien définie.

On a de plus  $g \circ f : [0, +\infty[ \mapsto \mathbb{R}$  et pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,  $g \circ f(x) = (x^2)^3 = x^6$ .

## 3 Injection, surjection, bijection

### 3.1 Injection

#### Définition 3.1 (Injection)

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles, et  $f$  une application définie de  $E$  dans  $F$ . On dit que  $f$  est une **injection** de  $E$  dans  $F$  lorsque deux éléments de  $E$  distincts ont des images distinctes dans  $F$  :

$$\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \implies x = x' \text{ (contraposée).}$$

**Remarque.** On peut aussi parler d'application injective.

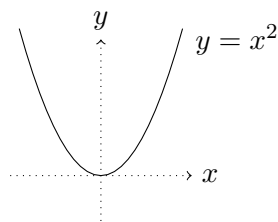
**Remarque.** Pour montrer qu'une application n'est pas injective, il faut donc montrer :

$$\exists(x, x') \in E^2 \text{ tels que } x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x'),$$

c'est-à-dire qu'on peut trouver deux éléments distincts de  $E$  qui ont la même image par  $f$ .

**Remarque.** Une fonction  $f$  est injective quand les éléments de l'espace d'arrivée ont au plus un antécédent.

**Exemple 11.** Soit  $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ .



$f$  n'est pas une injection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  car  $f(-2) = 4 = f(2)$ .

$f$  est par contre une injection de  $[0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ . En effet, soit  $(x, y) \in [0, +\infty[^2$ , on suppose que  $f(x) = f(y)$ . Alors  $x^2 = y^2$ , donc par passage à la racine  $|x| = |y|$  et par positivité de  $x$  et  $y$ ,  $x = y$ .

**Exercice 12.**  $g : \begin{array}{l} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto 2n + 2 \end{array}$  est-elle injective ?

Solution : Soit  $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ . Supposons que  $g(n_1) = g(n_2)$ . Alors  $2n_1 + 2 = 2n_2 + 2$ , et donc  $n_1 = n_2$ . Donc  $g$  est injective.

**Exercice 13.**  $h : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + 2y, x - z) \end{array}$  est-elle injective ?

Solution :  $h$  n'est pas injective car  $h((2, -1, 2)) = (0, 0) = h((0, 0, 0))$ .

**Proposition 3.2** (Composée de deux injections)

Soit  $E, F, G$  trois ensembles,  $f$  une injection de  $E$  dans  $F$  et  $g$  une injection de  $F$  dans  $G$ . Alors  $g \circ f$  est une injection de  $E$  dans  $G$ .

*Démonstration.* Soit  $(x, x') \in E^2$ , on suppose que  $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ . Donc  $g(f(x)) = g(f(x'))$ . Puisque  $g$  est injective, on en déduit  $f(x) = f(x')$ . Et puisque  $f$  est injective, on en déduit  $x = x'$ . Donc  $g \circ f$  est injective de  $E$  dans  $G$ .  $\square$

**Proposition 3.3** (Injection et stricte monotonie)

Soit  $I$  une partie de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une application strictement monotone de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors  $f$  est une injection.

*Démonstration.* On montre le résultat dans le cas où  $f$  est strictement croissante, la preuve fonctionne de même dans le cas strictement décroissant. Soit  $x$  et  $x'$  deux éléments distincts de  $I$ .

— Si  $x < x'$ , la stricte croissance de  $f$  donne  $f(x) < f(x')$ .

— Si  $x' < x$ , la stricte croissance de  $f$  donne  $f(x') < f(x)$ .

Dans tous les cas,  $f(x) \neq f(x')$ . Deux éléments distincts ont des images par  $f$  distinctes, donc  $f$  est une injection.  $\square$

**Exemple 14.** La fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , donc injective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

## 3.2 Surjection

### Définition 3.4 (Surjection)

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles, et  $f$  une application définie de  $E$  dans  $F$ . On dit que  $f$  est une **surjection** de  $E$  dans  $F$  lorsque tout élément de  $F$  admet au moins un antécédent dans  $E$  :

$$\forall y \in F, \exists x \in E \text{ tel que } f(x) = y.$$

**Remarque.** On peut aussi parler d'application surjective.

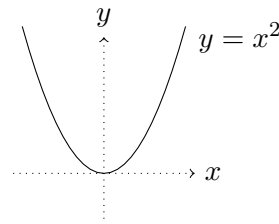
**Remarque.** La fonction  $f$  est une surjection si et seulement si  $f(E) = F$ . En particulier, toute application  $f$  définie sur un ensemble  $E$  est surjective de  $E$  dans  $f(E)$ .

**Remarque.** Pour montrer qu'une application n'est pas surjective, il faut donc montrer :

$$\exists y \in F \text{ tel que } \forall x \in E, f(x) \neq y,$$

c'est-à-dire qu'on peut trouver un élément de  $F$  qui n'a pas d'antécédent par  $f$ .

**Exemple 15.** Soit  $f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{matrix}$ .



$f$  n'est pas une surjection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  car  $-1$  n'admet aucun antécédent par  $f$ .

$f$  est par contre une surjection de  $\mathbb{R}$  dans  $[0, +\infty[$ . En effet, si  $y \in [0, +\infty[$ ,  $\sqrt{y}$  est bien défini. On a alors  $f(\sqrt{y}) = y$ , et donc  $\sqrt{y}$  est un antécédent de  $y$ .

**Exercice 16.**  $g : \begin{matrix} \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 2n + 2 \end{matrix}$  est-elle surjective ?

**Solution :** Montrons que  $g$  n'atteint pas les termes impairs, et 1 en particulier. Supposons qu'il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $g(n) = 1$ . Alors  $2n + 2 = 1$ , donc  $n = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$  : absurde. Donc 1 n'a pas d'antécédent par  $g$ . Donc  $g$  n'est pas surjective.

**Exercice 17.**  $h : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + 2y, x - z) \end{matrix}$  est-elle surjective ?

**Solution :** Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ . Alors  $h((\alpha, 0, \alpha - \beta)) = (\alpha + 2 \times 0, \alpha - (\alpha - \beta)) = (\alpha, \beta)$ . Comme  $(\alpha, 0, \alpha - \beta) \in \mathbb{R}^3$ ,  $h$  est surjective.

### Proposition 3.5 (Composée de deux surjections)

Soit  $E, F, G$  trois ensembles,  $f$  une surjection de  $E$  dans  $F$  et  $g$  une surjection de  $F$  dans  $G$ . Alors  $g \circ f$  est une surjection de  $E$  dans  $G$ .

**Démonstration.** Soit  $y \in G$ . Puisque  $g$  est surjective, il existe  $z \in F$  tel que  $g(z) = y$ . Puisque  $f$  est surjective, il existe  $x \in E$  tel que  $f(x) = z$ . Donc  $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(z) = y$ .

Donc il existe  $x \in E$  tel que  $y = g \circ f(x)$ . Donc  $g \circ f$  est surjective de  $E$  dans  $G$ .  $\square$

### 3.3 Bijection

#### Définition 3.6 (Bijection)

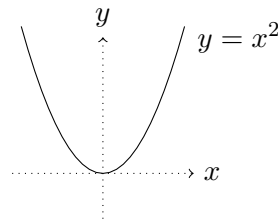
Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles, et  $f$  une application définie de  $E$  dans  $F$ . On dit que  $f$  est une **bijection** de  $E$  sur  $F$  lorsque  $f$  est une surjection et une injection :

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E \text{ tel que } f(x) = y.$$

**Remarque.** On peut aussi parler d'application bijective.

**Remarque.** Une fonction est donc bijective si tout élément de l'espace d'arrivée possède un et un seul antécédent.

**Exemple 18.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x^2$ .



$f$  est une bijection de  $[0, +\infty[$  dans  $[0, +\infty[$ .

**Exercice 19.**  $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$   
 $n \mapsto 2n + 2$  est-elle bijective ?

Solution :  $g$  n'est pas surjective, donc pas bijective.

**Exercice 20.**  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y, z) \mapsto (x + 2y, x - z)$  est-elle bijective ?

Solution :  $h$  n'est pas injective, donc pas bijective.

#### Définition 3.7 (Application réciproque)

Si  $f$  est une bijection de  $E$  sur  $F$ , on peut associer à tout  $y \in F$  son antécédent unique  $x \in E$ . On définit ainsi l'**application réciproque**  $f^{-1}$  de  $f$ .

#### Proposition 3.8 (Lien entre $f$ et $f^{-1}$ )

Soit  $x \in E$ ,  $y \in F$ ,  $f$  une application bijective de  $E$  dans  $F$  et  $f^{-1}$  l'application réciproque de  $f$ . Alors

$$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x).$$

*Démonstration.* On montre séparément les deux implications.

— On suppose que  $x = f^{-1}(y)$ , alors  $x$  est un antécédent de  $y$ , donc  $f(x) = y$ .

— Réciproquement, on suppose que  $f(x) = y$ , donc  $x$  est un antécédent de  $y$ . Or  $f$  est bijective, donc  $y$  admet un unique antécédent, qui est donc  $x$ . Donc  $x = f^{-1}(y)$ . □

**Remarque.** Cette constatation donne une nouvelle méthode pour montrer qu'une application est bijective, sans avoir à montrer séparément qu'elle est injective et surjective.

**Exercice 21.** Soit  $f$  l'application définie de  $\mathbb{R}$  dans  $]2, +\infty[$  par  $f(x) = e^{x-1} + 2$ . Montrer que  $f$  réalise une bijection de son ensemble de départ vers son ensemble d'arrivée, et déterminer son application réciproque.

Solution : Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in ]2, +\infty[$ ,

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = e^{x-1} + 2 \Leftrightarrow y - 2 = e^{x-1} \Leftrightarrow \ln(y - 2) = x - 1 \Leftrightarrow \ln(y - 2) + 1 = x,$$

où on pouvait bien composer par le logarithme puisque  $y - 2 > 0$ , sa stricte croissance sur  $\mathbb{R}_+^*$  justifiant la validité de l'équivalence.

Donc tout élément de  $]2, +\infty[$  admet un unique antécédent dans  $\mathbb{R}$ , donc  $f$  est bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $]2, +\infty[$ , et  $\forall y > 2, f^{-1}(y) = \ln(y - 2) + 1$ .

**Proposition 3.9** (Composée de deux bijections)

Soit  $E, F, G$  trois ensembles,  $f$  une bijection de  $E$  dans  $F$  et  $g$  une bijection de  $F$  dans  $G$ . Alors  $g \circ f$  est une bijection de  $E$  dans  $G$ . De plus,

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

*Démonstration.*  $g \circ f$  est injective comme composée d'injections et surjective comme composée de surjections, donc c'est bien une bijection de  $E$  dans  $G$ .

De plus, soit  $y \in G$  et  $x \in E$ , l'utilisation successive des réciproques de  $g$  et  $f$  donne :

$$y = g \circ f(x) \Leftrightarrow y = g(f(x)) \Leftrightarrow g^{-1}(y) = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(g^{-1}(y)) = x \Leftrightarrow f^{-1} \circ g^{-1}(y) = x.$$

Donc  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ . □

**Proposition 3.10** (Bijektivité et image réciproque)

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $f$  une bijection de  $E$  dans  $F$  et  $A$  un sous-ensemble de  $F$ . Alors

$$f^{-1}(A) = f^{\text{rec}}(A).$$

**Remarque.** Autrement dit, l'image directe de  $A$  par  $f^{-1}$  est égale à l'image réciproque de  $A$  par  $f$ . Cela justifie de renoncer à la notation  $f^{\text{rec}}$ , qui avait seulement été introduite à titre temporaire et que l'on n'utilisera plus jamais, pour utiliser  $f^{-1}$  à la place.

*Démonstration.* Soit  $x \in E$ ,

$$x \in f^{-1}(A) \Leftrightarrow \exists a \in A \text{ tel que } x = f^{-1}(a) \Leftrightarrow \exists a \in A \text{ tel que } f(x) = a \Leftrightarrow f(x) \in A \Leftrightarrow x \in f^{\text{rec}}(A).$$

Donc si  $x \in f^{-1}(A)$ ,  $x \in f^{\text{rec}}(A)$  et réciproquement. D'où l'égalité des ensembles. □

**Remarque.** Face à la notation  $f^{-1}(A)$  dans un exercice, deux cas de figure possible :

- Soit  $f$  est bijective, et  $f^{-1}(A)$  représente à la fois l'image directe de  $A$  par  $f^{-1}$  et l'image réciproque de  $A$  par  $f$ . Comme elles sont égales, il n'y a pas d'ambiguïté.
- Soit  $f$  n'est pas bijective, et  $f^{-1}(A)$  représente l'image réciproque de  $A$  par  $f$ . Dans ce cas, attention :  $f^{-1}$  n'est en aucun cas la marque d'une application réciproque (puisque  $f$  n'est pas bijective).