Convergence des suites réelles

Cours de É. Bouchet – ECS1

5 octobre 2018

Table des matières

1 Limite d'une suite

1.1 Convergence, divergence

Définition (Convergence d'une suite vers un réel)**.**

Soit ℓ un nombre réel. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers ℓ lorsque tout intervalle ouvert I contenant ℓ contient tous les termes de la suite u sauf un nombre fini. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Remarque. On peut aussi formuler cette définition comme suit : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$|u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Il s'agit d'une simple traduction de la définition dans le cas de l'intervalle ouvert $I =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$. En effet,

$$|u_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < u_n - \ell < \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon \Leftrightarrow u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$

Définition (Divergence d'une suite vers l'infini)**.**

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour limite lorsque tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ (resp. $]-\infty, A[$) contient tous les termes de la suite u sauf un nombre fini. On dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge** vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Remarque. On peut aussi formuler cette définition comme suit : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ lorsque pour tout $A > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$,

$$u_n > A.$$

On peut donc rencontrer trois types de cas différents en étudiant une limite :

1. La limite existe et est finie : la suite converge vers cette limite (il faut montrer l'existence *ET* trouver la valeur de la limite).
2. La limite existe mais n'est pas finie ($\pm\infty$) : la suite diverge vers cette limite.
3. La limite n'existe pas : la suite diverge (par absence de limite).

Proposition (Unicité de la limite)**.**

Lorsque la limite de la suite u existe, elle est unique.

Démonstration. (démonstration à connaître) On raisonne par l'absurde : supposons que la suite u possède deux limites distinctes ℓ et ℓ'. Soit $\varepsilon = \frac{|\ell-\ell'|}{3} > 0$. Par définition de la limite, on peut trouver des entiers n_0 et n_1 tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon \quad \text{et} \quad n \geqslant n_1 \Longrightarrow \left|u_n - \ell'\right| < \varepsilon.$$

Soit $n \geqslant \max(n_0, n_1)$. On obtient par inégalité triangulaire :

$$\left|\ell - \ell'\right| = \left|\ell - u_n + u_n - \ell'\right| \leqslant |\ell - u_n| + \left|u_n - \ell'\right| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}\left|\ell - \ell'\right|.$$

Cette dernière inégalité est absurde. D'où l'unicité de la limite. □

Proposition.

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Soit u une suite qui converge vers un réel ℓ. On considère l'intervalle ouvert $I =]\ell-1, \ell+1[$. Par définition de la limite, il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \in]\ell-1, \ell+1[$. Donc $\forall n \geqslant n_0$, $\ell - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell + 1$. Soit un entier $n \in \mathbb{N}$ quelconque, on a donc :

$$\min(u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}, \ell - 1) \leqslant u_n \leqslant \max(u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}, \ell + 1).$$

Le maximum ou minimum d'un nombre fini de termes existant toujours, cela termine la preuve : la suite est bornée. □

1.2 Opérations algébriques sur les suites convergentes

Limite de la somme de deux suites u et v dans le cas où u et v admettent des limites :

Somme	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell'$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

Limite du produit de deux suites u et v dans le cas où u et v admettent des limites :

Produit	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell > 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell < 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell' > 0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell' < 0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$	0	0	0	F.I.	F.I.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$

2 Passage à la limite et relations d'ordre

Proposition (Passage à la limite dans une relation d'ordre)**.**

Soient u et v deux suites convergentes, vérifiant à partir d'un certain rang l'inégalité $u_n \leqslant v_n$. On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Démonstration. On raisonne par l'absurde : supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
La suite $u - v$ converge alors vers $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \lim\limits_{n\to+\infty} v_n > 0$.
Par définition de la convergence, $]0, +\infty[$ contient tous les termes $u_n - v_n$ sauf un nombre fini. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n - v_n > 0$. C'est en contradiction avec l'hypothèse de l'énoncé. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. □

Remarque. Attention, ce résultat ne s'applique que si on sait déjà que les deux limites existent.

Remarque. Attention, ce résultat ne se généralise pas aux inégalités strictes : $u_n < v_n \not\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

> **Théorème** (Théorème d'encadrement)**.**
>
> Soient u, v et w trois suites réelles telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Si u et w convergent vers une même limite ℓ réelle alors v converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Remarque. Ce théorème donne *à la fois l'existence et la valeur* de la limite.

Démonstration. (démonstration à connaître) Soit $\varepsilon > 0$. D'après les hypothèses, il existe des entiers n_0, n_1 et n_2 tels que :

$$\begin{aligned} n \geqslant n_0 &\Longrightarrow u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \\ n \geqslant n_1 &\Longrightarrow u_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\\ n \geqslant n_2 &\Longrightarrow w_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\end{aligned}$$

Pour $n \geqslant n_3 := \max(n_0, n_1, n_2)$, on obtient $\ell - \varepsilon < u_n \leqslant v_n \leqslant w_n < \ell + \varepsilon$. Donc

$$n \geqslant n_3 \Longrightarrow v_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[.$$

Cela termine la preuve. □

> **Théorème** (Théorème de comparaison)**.**
>
> Soient u et v deux suites réelles telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$.
> — Si u diverge vers $+\infty$ alors v diverge vers $+\infty$.
> — Si v diverge vers $-\infty$ alors u diverge vers $-\infty$.

Démonstration. On montre le premier résultat, le deuxième se montre de la même manière. Soit $A > 0$. D'après les hypothèses, il existe des entiers n_0 et n_1 tels que :

$$\begin{aligned} n \geqslant n_0 &\Longrightarrow u_n \leqslant v_n \\ n \geqslant n_1 &\Longrightarrow u_n > A \end{aligned}$$

Pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on a donc $v_n \geqslant u_n > A$ donc $v_n > A$. Ce qui termine la preuve. □

> **Théorème** (Théorème des suites monotones)**.**
>
> — Toute suite croissante et majorée converge vers ℓ, sa borne supérieure.
> — Toute suite décroissante et minorée converge vers ℓ, sa borne inférieure.
> — Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.
> — Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Remarque. L'existence de la borne supérieure ou inférieure est assurée par le théorème de la borne supérieure : $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble de réels non vide, qui admet un majorant quand la suite est majorée, et un minorant quand elle est minorée.

Remarque. Attention, connaître un majorant ne signifie pas qu'il s'agit de la limite de la suite.

3 Suites adjacentes

Définition (Suites adjacentes)**.**

Soient u et v deux suites. On dit qu'elles sont **adjacentes** lorsque

1. u est croissante,
2. v est décroissante,
3. $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Théorème (Convergence des suites adjacentes)**.**

Soit u et v deux suites adjacentes telles que u est croissante et v est décroissante. Alors u et v convergent vers une même limite réelle ℓ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$

Démonstration. (démonstration à connaître)

— $u - v$ converge (vers 0), et est donc majorée par un réel M.

— $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_n - v_n + v_n \leqslant M + v_n \leqslant M + v_0$ par décroissance de v. Donc u est majorée. Or u est croissante : par théorème des suites monotones, elle converge vers un réel ℓ_u, et on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ell_u \geqslant u_n$.

— $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_n - u_n + u_n \geqslant -M + u_n \geqslant -M + u_0$ par croissance de u. Donc v est minorée. Or v est décroissante : par théorème des suites monotones, elle converge vers un réel ℓ_v, et on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ell_v \leqslant v_n$.

— Par somme de limites, $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell_u - \ell_v$. Or on a supposé que cette suite convergeait vers 0. Donc $\ell_u = \ell_v$. Donc u et v convergent vers une même limite réelle, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

□

Exemple 1. Soit, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$. Démontrer que ces suites sont adjacentes.

u est croissante car $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geqslant 0.$$

v est décroissante car $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2-n-1}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \leqslant 0.$$

$v - u$ tend vers 0 car $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n - u_n = \frac{1}{n!} \longmapsto_{n\to+\infty} 0.$$

Les deux suites sont donc adjacentes. On verra plus tard dans l'année qu'elles convergent vers e.

4 Rappel des croissances comparées

Les comparaisons suivantes sont à connaître parfaitement, et réutilisables avec le simple rappel : « par croissances comparées ». Le tableau est à comprendre comme suit : en cas de produit comportant des éléments de deux colonnes (ou plus), c'est le comportement de la colonne avec le plus faible numéro qui l'emporte.

1	2	3	4
$\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$	$q > 1,\ \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$	$a > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^a = +\infty$	$b > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} (\ln n)^b = +\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$	$\lvert q\rvert < 1,\ \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$	$a < 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^a = 0$	$b < 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} (\ln n)^b = 0$

Exemple 2. Résolution de formes indéterminées (avec ou sans croissances comparées) :

1. (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ par croissances comparées, car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n^2)}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2\ln(n)}{n^{\frac{1}{2}}} = 0$ par croissances comparées.

   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)$

   En utilisant la quantité conjuguée, on trouve pour tout $n \geqslant 1$:

$$\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{n+\sqrt{n}-n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+1},$$

   d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right) = \frac{1}{2}$.

2. (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n! - e^n) = \lim\limits_{n\to+\infty} n!\left(1 - \frac{e^n}{n!}\right) = +\infty$ car par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n!} = 0$.

   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2^n - n^2\ln(n^3)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n\left(1 - \frac{n^2\ln(n^3)}{2^n}\right) = +\infty$ car $|2| > 1$ et par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2\ln(n^3)}{2^n} = 0$.

   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n-1)(2n+3)}{4n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^2+n-3}{4n^2} = \frac{1}{2}$.

3. (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^n$

   $\forall n \geqslant 1$, par positivité de l'expression, $\left(\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(\ln\left(\left(\frac{1}{n}\right)^n\right)\right) = \exp\left(n\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. Donc par composition de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^n = 0$.

   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

   C'est un piège : on ne peut pas le calculer avec les règles de calcul dont on dispose actuellement. En effet, la limite est à la fois dans la puissance et la parenthèse, on a une forme indéterminée du type « $1^{+\infty}$ ». Pour l'étudier rigoureusement, il faudrait passer sous forme exponentielle : comme $1+\frac{1}{n} > 0$, on peut écrire :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\right) = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$

   Mais même ainsi, l'expression dans l'exponentielle reste une forme indéterminée qui ne se résout pas avec les croissances comparées. Il faudra attendre le chapitre sur les études asymptotiques de suites au deuxième semestre pour les étudier plus en détail et montrer que la suite converge vers e.