

Développements limités et études locales

Cours de É. Bouchet – PCSI

16 mars 2023

Table des matières

1	Développements limités	2
1.1	Définition et premières propriétés	2
1.2	Opérations sur les développements limités	3
1.3	Formule de Taylor-Young	5
1.4	Développements limités usuels en 0	6
1.5	Exemples de calculs	8
2	Étude locale de suites et de fonctions	9
2.1	Recherche de limite ou équivalent	9
2.2	Positions relatives de la courbe et sa tangente	10
2.3	Recherche d'asymptote	10
2.4	Recherche d'extremum local	11
2.5	Étude asymptotique de suites	12

Dans tout le chapitre, les fonctions et suites considérées sont à valeurs réelles, mais les résultats se généralisent sans difficulté au cas de valeurs complexes.

1 Développements limités

1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1.1 (Développement limité)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie au voisinage de a . On dit que f **admet un développement limité d'ordre n en a** lorsqu'il existe $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ telles que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x - a) + \dots + a_n(x - a)^n + o((x - a)^n).$$

Le polynôme $a_0 + a_1(x - a) + \dots + a_n(x - a)^n$ est appelé la **partie régulière** du développement limité.

Exemple. On sait que $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, donc $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$, et sinus admet un développement limité d'ordre 1 en 0 ($a_0 = 0, a_1 = 1$). Sa partie régulière est x .

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on sait que $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$. Donc $\frac{1}{1 - x} = \sum_{k=0}^n x^k + \frac{x^{n+1}}{1 - x}$.

Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{n+1}}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - x} = 0$. Donc $\frac{x^{n+1}}{1 - x} \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$.

On en déduit que $\frac{1}{1 - x}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0, qui vaut : $\frac{1}{1 - x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$.

Remarque. Un développement limité fournit des approximations polynomiales de f au voisinage du point étudié : la courbe $y = a_0$ est la meilleure approximation à l'ordre 0, $y = a_0 + a_1(x - a)$ la meilleure à l'ordre 1, etc.

Remarque. On peut ramener tout développement limité au voisinage de a à un développement limité au voisinage de 0, puisque $\lim_{h \rightarrow 0} (a + h) = a$: si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x - a) + \dots + a_n(x - a)^n + o((x - a)^n)$, alors

$$f(a + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n + o(h^n).$$

Proposition 1.2 (Unicité du développement limité)

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a . Si f admet un développement limité à l'ordre n en a , alors ce développement est unique.

Démonstration. Supposons qu'il existe deux développements limités à l'ordre n en a :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x - a) + \dots + a_n(x - a)^n + o((x - a)^n) \underset{x \rightarrow a}{=} b_0 + b_1(x - a) + \dots + b_n(x - a)^n + o((x - a)^n).$$

On raisonne par l'absurde et suppose que $(a_0, a_1, \dots, a_n) \neq (b_0, b_1, \dots, b_n)$. Soit p le plus petit entier de $[[0, n]]$ tel que $a_p \neq b_p$. Alors

$$(a_p - b_p)(x - a)^p + \dots + (a_n - b_n)(x - a)^n \underset{x \rightarrow a}{=} o((x - a)^n),$$

ce qui donne, en divisant par $(x - a)^p \neq 0$,

$$(b_p - a_p) \underset{x \rightarrow a}{=} (a_{p+1} - b_{p+1})(x - a) + \dots + (a_n - b_n)(x - a)^{n-p} + o((x - a)^{n-p}) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

Donc $a_p = b_p$, absurde. D'où le résultat. □

Proposition 1.3 (Troncature)

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a . On suppose que f admet un développement limité $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$. Alors pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, f admet un développement limité $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_k(x-a)^k + o((x-a)^k)$.

Démonstration. On sait que $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $p \geq k+1$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)^p}{(x-a)^k} = \lim_{x \rightarrow a} (x-a)^{p-k} = 0$, donc $(x-a)^p = o((x-a)^k)$. On en déduit par propriété des négligeabilités que :

$$a_{k+1}(x-a)^{k+1} + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n) = o((x-a)^k).$$

D'où le résultat. □

Remarque. Si on connaît un développement limité d'une fonction à un ordre $n \in \mathbb{N}$, on en connaît donc aussi à tous les ordres inférieurs.

Exemple. La relation $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1+x+x^2+o(x^2)$ donne directement que $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1+x+o(x)$. Cette deuxième relation porte cependant moins d'informations que la première.

Proposition 1.4 (Cas des fonctions paires ou impaires)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0.

- Si f est paire, les coefficients de rang impair du développement limité sont nuls.
- Si f est impaire, les coefficients de rang pair du développement limité sont nuls.

Démonstration. On traite le cas f paire (le cas f impaire se gère de la même façon). Puisqu'elle admet un développement limité à l'ordre n en 0, il existe $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n).$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$, une composition à droite donne $f(-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 - a_1x + \dots + (-1)^n a_nx^n + o(x^n)$. Par parité, ces deux développements limités correspondent à la même fonction. L'unicité du développement limité donne alors $a_1 = -a_1, a_3 = -a_3, \dots$. Ce qui permet de conclure. □

Exemple. On a vu précédemment que $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$. Or $\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0$, donc par composition à droite :

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-x^2)^k + o((-x^2)^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}).$$

1.2 Opérations sur les développements limités

Proposition 1.5 (Somme de développements limités)

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et f et g deux fonctions définies au voisinage de a . On suppose que f et g admettent chacune un développement limité d'ordre n en a . Alors $f + \lambda g$ admet un développement limité d'ordre n en a .

De plus, la partie régulière du développement limité de $f + \lambda g$ est égale à la partie régulière du développement limité de f plus λ fois la partie régulière du développement limité de g .

Démonstration. On suppose qu'on a les développements $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$ et $g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$. Alors, par combinaison linéaire de ces égalités,

$$(f + \lambda g)(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + \lambda b_0 + (a_1 + \lambda b_1)(x-a) + \dots + (a_n + \lambda b_n)(x-a)^n + o((x-a)^n),$$

d'où l'existence du développement limité et l'expression annoncée. \square

Proposition 1.6 (Produit de développements limités)

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et f et g deux fonctions définies au voisinage de a . On suppose que f et g admettent chacune un développement limité d'ordre n en a . Alors fg admet un développement limité d'ordre n en a . La partie régulière du développement limité de fg est obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le produit des parties régulières de f et g .

Démonstration. On suppose qu'on a les développements $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$ et $g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$. Alors, par produit de ces égalités,

$$\begin{aligned} (fg)(x) &\underset{x \rightarrow a}{=} \left(\sum_{i=0}^n a_i(x-a)^i + o((x-a)^n) \right) \left(\sum_{j=0}^n b_j(x-a)^j + o((x-a)^n) \right) \\ &\underset{x \rightarrow a}{=} \left(\sum_{i=0}^n a_i(x-a)^i \right) \left(\sum_{j=0}^n b_j(x-a)^j \right) + o((x-a)^n) + o((x-a)^n) + o((x-a)^{2n}) \\ &\underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \sum_{i+j=k} a_i b_j (x-a)^k + o((x-a)^n), \end{aligned}$$

d'où l'existence du développement limité et l'expression annoncée. \square

Exercice 1. Déterminer un développement limité de $\left(\frac{1}{1-x}\right)^2$ à l'ordre 2 en 0.

Solution : Comme $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2)$, on trouve par produit et en développant :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 &\underset{x \rightarrow 0}{=} (1 + x + x^2 + o(x^2))(1 + x + x^2 + o(x^2)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} (1 + x + x^2) + (x + x^2) + (x^2) + o(x^2) \\ \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + 3x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Proposition 1.7 (Primitivation d'un développement limité)

Soient I un intervalle, $a \in I$ et f une fonction dérivable sur I .

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que f' admet un développement limité $f'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$. Alors

f admet un développement limité $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^n a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o((x-a)^{n+1})$

Démonstration. On pose g la fonction définie de I dans \mathbb{R} par $\forall x \in I, g(x) = f(x) - f(a) - \sum_{k=0}^n a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1}$. Elle est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables, et $\forall x \in I, g'(x) = f'(x) - \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k$, on a donc $g'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o((x-a)^n)$.

Soit $x \in I \setminus \{a\}$. La fonction g est continue et dérivable sur I , donc d'après l'égalité des accroissements finis, il existe un réel c_x compris entre a et x tel que $\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(c_x)$. On construit ainsi une fonction c de $I \setminus \{a\}$ dans \mathbb{R} et telle que $\forall x \in I, |c_x - a| \leq |x - a|$. Un théorème d'encadrement donne alors que $\lim_{x \rightarrow a} c_x = a$, et :

$$\left| \frac{g(x)}{(x-a)^{n+1}} \right| = \left| \frac{g(x) - g(a)}{(x-a)^{n+1}} \right| = \left| \frac{g'(c_x)}{(x-a)^n} \right| = \left| \frac{g'(c_x)}{(c_x - a)^n} \right| \left| \frac{(c_x - a)^n}{(x-a)^n} \right| \leq \left| \frac{g'(c_x)}{(c_x - a)^n} \right| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0,$$

où cette dernière limite s'obtient par composition à droite dans la relation $g'(x) = o((x-a)^n)$. On en déduit que $g(x) - g(a) = o((x-a)^{n+1})$, d'où le résultat annoncé en remplaçant g par sa définition. \square

Remarque. Attention : dans le cas général, on ne peut par contre pas dériver un développement limité.

Proposition 1.8 (Développement limité de $\tan(x)$)

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Démonstration. On a déjà vu que $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$. Donc $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$.

Or tangente est dérivable sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et $\forall x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$. Donc par opérations sur les négligeabilités,

$$\tan'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + (x + o(x))^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x^2 + xo(x) + xo(x) + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x^2 + o(x^2).$$

On trouve donc en primitivant : $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \tan(0) + x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. \square

1.3 Formule de Taylor-Young

Proposition 1.9 (Existence d'un développement limité d'ordre 0)

Soit $a \in \mathbb{R}$, et f une fonction définie en a et au voisinage de ce point. La fonction f est continue en a si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 0 en a . On a alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o(1)$.

Démonstration. On commence par remarquer que :

$$f \text{ est continue en } a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \iff f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o(1).$$

Donc si f est continue en a , elle admet bien un développement limité d'ordre 0 en ce point. Réciproquement, s'il existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + o(1)$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a_0$. Donc $a_0 = f(a)$ et f est continue en a . \square

Proposition 1.10 (Existence d'un développement limité d'ordre 1)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie en a et au voisinage de ce point. La fonction f est dérivable en a si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 1 en a . On a alors :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o((x-a)).$$

Démonstration.

— Si f est dérivable en a , alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \in \mathbb{R}$, donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x \rightarrow a}{=} f'(a) + o(1)$, ce qui donne bien $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o((x-a))$.

— Réciproquement, si f admet un développement limité d'ordre 1 en a , il existe $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ telles que $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x - a) + o((x - a))$. Un passage à la limite donne $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a_0$, donc $a_0 = f(a)$. On en déduit $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \rightarrow a}{=} a_1 + o(1)$, ce qui donne $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = a_1 \in \mathbb{R}$. Donc f est dérivable en a et $f'(a) = a_1$. □

Proposition 1.11 (Formule de Taylor-Young)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction de classe C^n sur un intervalle I et $a \in I$, alors :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(x - a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x - a)^n).$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : \ll \text{Si } f \in C^n(I, \mathbb{R}), \text{ alors } f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(x - a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x - a)^n) \gg$.

— Si f est continue sur I , alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o(1) \underset{x \rightarrow a}{=} \frac{(x - a)^0}{0!} f^{(0)}(a) + o((x - a)^0)$. Donc $P(0)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie. Soit $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$. Alors f est dérivable sur I et $f' \in C^n(I, \mathbb{R})$.

L'hypothèse de récurrence appliquée à f' donne alors : $f'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(x - a)^k}{k!} f^{(k+1)}(a) + o((x - a)^n)$,

ce qui donne en primitivant :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^n \frac{(x - a)^{k+1}}{(k + 1)!} f^{(k+1)}(a) + o((x - a)^{n+1}) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(x - a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + o((x - a)^{n+1}).$$

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

D'où le résultat annoncé. □

Remarque. On peut également écrire $f(a + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(h^n)$.

1.4 Développements limités usuels en 0

Proposition 1.12 (Développement limité de la fonction exponentielle)

$$\exp(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction exponentielle est de classe C^n sur \mathbb{R} et $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \exp^{(k)} = \exp$. D'après la formule de Taylor-Young, l'exponentielle admet donc pour développement limité à l'ordre n en 0 :

$$\exp(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \exp(0) + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

□

Proposition 1.13 (Développement limité de $\text{sh}(x)$ et $\text{ch}(x)$)

$$\begin{aligned} \text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n + 1)!} + o(x^{2n+1}) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k + 1)!} + o(x^{2n+1}), \\ \text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}). \end{aligned}$$

Démonstration. On revient à la définition des deux fonctions, en utilisant le développement limité d'exponentielle à l'ordre $2n + 1$ et en composant à droite par $-x$ car $\lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$:

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} + o(x^{2n+1}) - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + o(x^{2n+1})}{2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

On procède de même pour ch . □

Remarque. Les exposants $2k$ et $2k + 1$ ont été introduits pour permettre d'avoir des formules simples, mais il faut garder à l'esprit que l'ordre d'un développement limité correspond à la puissance qui apparaît dans le o .

Exercice 2. Déterminer les développements limités en 0 de sh et ch à l'ordre 5.

Solution : $\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ et $\operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$.

Proposition 1.14 (Développement limité de la fonction inverse)

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n),$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n).$$

Démonstration. Le premier développement limité a été montré en exemple dans le début du chapitre. Le deuxième s'en déduit par composition à droite puisque $\lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$. □

Proposition 1.15 (Développement limité de la fonction logarithme)

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

Démonstration. On primitive le développement limité $\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + o(x^{n-1})$, ce qui donne :

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(1+0) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{x^i}{i} + o(x^n) \text{ en posant } i = k + 1.$$

□

Proposition 1.16 (Développement limité de $\arctan(x)$)

$$\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}).$$

Démonstration. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, donc $\frac{1}{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$ et par passage aux primitives,

$$\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \arctan(0) + \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}).$$

□

Proposition 1.17 (Développement limité des fonctions puissances)

Pour tout réel α ,

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha \frac{x}{1!} + \alpha(\alpha-1) \frac{x^2}{2!} + \cdots + \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1) \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : x \rightarrow (1+x)^\alpha$ est de classe C^n sur $] -1, +\infty[$ et d'après les formules de dérivées usuelles, $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\forall x \in] -1, +\infty[$, $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$. D'après la formule de Taylor-Young, f admet donc pour développement limité à l'ordre n en 0 :

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha \frac{x}{1!} + \alpha(\alpha-1) \frac{x^2}{2!} + \cdots + \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1) \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

□

Exercice 3. Déterminer un développement limité de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 en 0.

Solution : La formule donne : $\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$.

Proposition 1.18 (Développement limité de $\sin(x)$ et $\cos(x)$)

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}).$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : x \rightarrow \sin(x)$ est de classe C^{2n+1} sur \mathbb{R} et d'après les formules de dérivées usuelles, $\forall k \in \llbracket 0, 2n+1 \rrbracket$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(x) = \sin(x + k\frac{\pi}{2})$. D'après la formule de Taylor-Young, f admet donc pour développement limité à l'ordre $2n+1$ en 0 :

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

On procède de même pour \cos .

□

1.5 Exemples de calculs

Exercice 4. Déterminer un développement limité d'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \cos x$.

Solution : $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Exercice 5. Déterminer un développement limité d'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \cos x$.

Solution : $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$.

Exercice 6. Déterminer un développement limité d'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1+2x} - \exp(x)$.

Solution : $\exp(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. De plus, $\sqrt{1+2x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ donc

$$\sqrt{1+2x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}(2x) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{(2x)^2}{2} + o((2x)^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Donc $\sqrt{1+2x} - \exp(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x^2 + o(x^2)$.

Exercice 7. Déterminer un développement limité d'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \frac{\cos(x)}{1+x}$.

Solution : $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ et $\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$, d'où par produit :

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x)}{1+x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) (1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{2} + o(x^3) \\ \frac{\cos(x)}{1+x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3). \end{aligned}$$

Exercice 8. Déterminer un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{x}$.

Solution : On commence par chercher un développement limité à l'ordre 6 (puisqu'on divisera ensuite par x) en 0 de $x \mapsto \ln(1+x^2)$. On sait que $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, donc par composition à droite :

$$\ln(1+x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6).$$

Diviser par x donne alors :

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{3} + o(x^5).$$

Exercice 9. Déterminer un développement limité d'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1+\ln(1+x)}$.

Solution : $1 + \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Or $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) = 0$ et on a $\frac{1}{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - u + u^2 + o(u^2)$, une composition à droite donne donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\ln(1+x)} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{1+x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) + \left(x - \frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^2) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2 + o(x^2) \\ \frac{1}{1+\ln(1+x)} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

2 Étude locale de suites et de fonctions

2.1 Recherche de limite ou équivalent

Exercice 10. Montrer que la fonction f définie sur $]0, 1]$ par $\forall x \in]0, 1], f(x) = \frac{2}{\sin(x)} - \frac{2}{\ln(1+x)}$ est prolongeable par continuité en 0.

Solution : On commence par tout mettre au même dénominateur pour y voir plus clair : $\forall x \in]0, 1]$,

$$f(x) = \frac{2}{\sin(x) \ln(1+x)} (\ln(1+x) - \sin(x)).$$

Les équivalents usuels donnent le comportement du dénominateur : $\sin(x) \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$, ils ne permettent par contre pas de gérer directement le numérateur (puisqu'il est interdit de sommer des équivalents). On cherche donc

un développement limité en 0 du numérateur (l'ordre est à déterminer pendant le calcul afin d'obtenir au moins un terme non nul).

$$\ln(1+x) - \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} - x + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

On en déduit que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -1$ et donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 \in \mathbb{R}$. La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0.

Exercice 11. Déterminer un équivalent de la suite $u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Solution : On commence par étudier la fonction f définie sur $] -1, +\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1+x)$ (de manière à chercher un développement limité en 0). On sait que $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc par somme de développements limités :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc par composition à droite, $u_n = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$.

2.2 Positions relatives de la courbe et sa tangente

Exercice 12. Déterminer la tangente en 0 de la fonction f définie sur $] -1, +\infty[$ par $\forall x \in] -1, +\infty[$, $f(x) = \frac{\cos(x)}{1+x}$ et étudier la position de la courbe par rapport à sa tangente.

Solution : L'exercice 7 nous donne $\frac{\cos(x)}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$. La courbe admet donc en 0 une tangente d'équation $y = 1 - x$ (par propriété des développements limités d'ordre 1), et

$$f(x) - (1 - x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \geq 0.$$

Au voisinage de 0, la courbe est donc au-dessus de sa tangente en 0.

2.3 Recherche d'asymptote

Définition 2.1 (Asymptote)

Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On dit que f admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour **asymptote** au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} ax + b + o(1) \quad (\text{resp. } f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{=} ax + b + o(1))$$

Exercice 13. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2}$. Déterminer son asymptote au voisinage de $+\infty$ et étudier la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Remarque : on pourrait utiliser une décomposition en éléments simples, mais on ne le fera pas ici pour travailler les compétences de développements limités.

Solution : On commence par poser $x = \frac{1}{h}$ pour se ramener à une étude au voisinage de 0 et on factorise le dénominateur pour se ramener au développement limité en 0 de $u \mapsto \frac{1}{1+u}$:

$$\forall h \in \mathbb{R}^*, \quad f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{\frac{1}{h^3} + \frac{1}{h^2}}{\frac{1}{h^2} + 2} = \frac{1+h}{h+2h^3} = \frac{1+h}{h} \frac{1}{1+2h^2}.$$

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} 2h^2 = 0$, on trouve en composant à droite :

$$f\left(\frac{1}{h}\right) \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1+h}{h} (1 - 2h^2 + o(h^2)) \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1+h-2h^2+o(h^2)}{h} \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{h} + 1 - 2h + o(h).$$

On en déduit :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x + 1 - \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc $y = x + 1$ est asymptote à f au voisinage de $+\infty$ et $f(x) - (x + 1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2}{x} \leq 0$. La courbe est donc en dessous de son asymptote.

2.4 Recherche d'extremum local

Remarque. Rappel : les extrema locaux d'une fonction de classe C^1 sauf en un nombre fini de points, sur un intervalle quelconque, sont à chercher parmi :

- ses points critiques,
- les points où la fonction n'est pas dérivable,
- les bornes de l'intervalle.

Proposition 2.2 (Utilisation de la dérivée seconde)

Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle ouvert I et soit $c \in I$ un point critique de f . Alors,

- Si $f^{(2)}(c) > 0$, alors f possède un minimum local en c .
- Si $f^{(2)}(c) < 0$, alors f possède un maximum local en c .

Remarque. Si $f^{(2)}(c) = 0$, on ne peut rien conclure.

Démonstration. La fonction f est de classe C^2 , on peut donc effectuer un développement limité à l'ordre 2 en c : pour h au voisinage de 0,

$$f(c+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(c) + hf'(c) + \frac{h^2}{2}f''(c) + o(h^2).$$

Or c est un point critique de f , donc $f'(c) = 0$, et on a pour h au voisinage de 0 :

$$f(c+h) - f(c) \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{h^2}{2}f''(c) + o(h^2).$$

- Si $f^{(2)}(c) > 0$, alors $f(c+h) - f(c) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{h^2}{2}f''(c) > 0$ et f possède un minimum local en c .
- Si $f^{(2)}(c) < 0$, alors $f(c+h) - f(c) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{h^2}{2}f''(c) < 0$ et f possède un maximum local en c .

□

Exercice 14. Trouver les extrema de la fonction $f : x \mapsto x^3 - x^2 - x + 1$ définie sur $[-2, \frac{3}{2}]$. Déterminer leur nature, et s'ils sont locaux ou globaux.

Solution : Par le théorème des bornes, la fonction est continue sur un segment, donc admet au moins un minimum global et un maximum global (il va falloir les déterminer). La fonction f est de classe C^2 sur son intervalle de définition, donc les extrema sont soit des points critiques, soit des bornes de l'intervalle. On commence par chercher les points critiques : $\forall x \in [-2, \frac{3}{2}]$,

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 \text{ et } f''(x) = 6x - 2.$$

Donc $f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 2x - 1 = 0$. On cherche les racines de ce polynôme : $\Delta = 4 + 4 \times 3 = 16 = 4^2$, donc on a deux racines réelles, qui sont 1 et $-\frac{1}{3}$.

Il y a donc au total quatre points à étudier : 1, $-\frac{1}{3}$, -2 et $\frac{3}{2}$. On commence par calculer leurs images :

$$f(1) = 0, \quad f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{27} \simeq 1,19, \quad f(-2) = -9, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{8} \simeq 0,63.$$

Le minimum global vaut donc -9 et est atteint en -2, et le maximum global vaut $\frac{32}{27}$ et est atteint en $-\frac{1}{3}$.

Il ne reste plus qu'à étudier les deux points restants : $f''(1) = 4 > 0$, donc 0 correspond à un minimum local atteint en 1. De plus,

$$f\left(\frac{3}{2} + h\right) - f\left(\frac{3}{2}\right) = hf'\left(\frac{3}{2}\right) + o(h) = \frac{11}{4}h + o(h).$$

C'est négatif à gauche de $\frac{3}{2}$ (qui est la borne de droite de l'intervalle), donc $\frac{5}{8}$ correspond à un maximum local atteint en $\frac{3}{2}$.

2.5 Étude asymptotique de suites

Exercice 15. On considère les suites $(x_n)_{n \geq 2}$ et $(y_n)_{n \geq 2}$ telles que $\begin{cases} x_n \rightarrow -\infty \\ e^{x_n} = x_n + n \end{cases}$ et $\begin{cases} y_n \rightarrow +\infty \\ e^{y_n} = y_n + n \end{cases}$.

Un exercice de la fiche d'exercices « Limites et continuité » garantit la bonne définition de ces suites, étudier leur comportement asymptotique.

Solution :

— On conjecture que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{x_n} - n}{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{x_n}}{-n} + 1 \right) = 0 + 1 = 1,$$

puisque par composition $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{x_n} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$. D'où l'équivalent annoncé.

— On conjecture que $y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{y_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{y_n} - y_n)}{y_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{y_n}) + \ln(1 - \frac{y_n}{e^{y_n}})}{y_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln(1 - \frac{y_n}{e^{y_n}})}{y_n} \right) = 1 + 0 = 1,$$

puisque par croissances comparées et composition, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n}{e^{y_n}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$. D'où l'équivalent annoncé.

Exercice 16. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 \leq u_n \leq 1 + \frac{2}{n}$.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P(n)$: « $1 \leq u_n \leq 1 + \frac{2}{n}$ ».

— $u_1 = 1$, donc $1 \leq u_1 \leq 1 + 2$ et $P(1)$ est vraie.

— $u_2 = 1 + \frac{u_1}{2} = \frac{3}{2}$ donc $1 \leq u_2 \leq 1 + 1$ et $P(2)$ est vraie (vérifier $P(2)$ est nécessaire pour pouvoir supposer $n \geq 2$ dans l'hérédité).

— Soit $n \geq 2$, on suppose que $P(n)$ est vraie. Donc $1 \leq u_n \leq 1 + \frac{2}{n} \leq 1 + 1 = 2$, on en déduit $0 \leq \frac{u_n}{n+1} \leq \frac{2}{n+1}$. Donc $1 \leq u_{n+1} \leq 1 + \frac{2}{n+1}$ et $P(n+1)$ est vraie.

On obtient donc bien l'inégalité voulue.

2. En déduire que $u_n = 1 + o(1)$:

Solution : Par théorème d'encadrement, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{n} = 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$. Donc $u_n = 1 + o(1)$.

3. En déduire que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$:

Solution : $u_n = 1 + o(1)$, donc $\frac{u_n}{n+1} = \frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)$. Donc $u_n = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Rmq : on peut formaliser cette dernière égalité avec une composition à droite, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 1 = +\infty$, mais ce n'est pas la difficulté principale de la question.

4. En déduire que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$:

Solution : $u_n = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $\frac{u_n}{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

Donc $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{(n-1)n} + o\left(\frac{1}{(n-1)n}\right)$, ce qui donne successivement $u_n - 1 - \frac{1}{n} \sim \frac{1}{(n-1)n} \sim \frac{1}{n^2}$ (grâce à la relation entre équivalents et négligeabilités). Donc $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

5. En déduire que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$:

Solution : $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $1 + \frac{u_n}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n^2(n+1)} + o\left(\frac{1}{n^2(n+1)}\right)$.

Donc $u_{n+1} - 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n^2(n+1)} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{n(n+1) - n^2 + n + 1}{n^2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

On poursuit : $u_{n+1} - 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{2}{n(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n(n+1)^2}\right)$.

Donc $u_{n+1} - 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \sim \frac{2}{n(n+1)^2} \sim \frac{2}{(n+1)^3}$. On a enfin $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{(n+1)^3} + o\left(\frac{1}{(n+1)^3}\right)$

puis $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.