Développements limités

Cours de É. Bouchet – ECS1

2 juin 2021

Table des matières

1 Généralités

1.1 Définition

Définition (Développement limité)**.**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction à valeurs réelles définie au voisinage de x_0. On dit que f **admet un développement limité** d'ordre n en x_0 lorsqu'il existe $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que :

$$f(x) =_{x_0} a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right).$$

Le polynôme $a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$ est appelé la **partie régulière** du développement limité.

Exemple 1. On sait que $\sin(x) \sim_0 x$, donc $\sin(x) =_0 x + o(x)$, et sinus admet un développement limité d'ordre 1 en 0 ($a_0 = 0$, $a_1 = 1$). Sa partie régulière est x.

1.2 Propriétés

Proposition (Unicité du développement limité)**.**

Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction à valeurs réelles définie au voisinage de x_0. Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, alors ce développement est unique.

Démonstration. (démonstration à connaître) Supposons qu'il existe deux développements limités à l'ordre n en x_0 :

$$f(x) =_{x_0} a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right) =_{x_0} b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_n(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right).$$

On raisonne par l'absurde et suppose que $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \neq (b_0, b_1, \ldots, b_n)$. Soit p le plus petit entier de $[\![0, n]\!]$ tel que $a_p \neq b_p$. Alors

$$(a_p - b_p)(x - x_0)^p + \cdots + (a_n - b_n)(x - x_0)^n =_{x_0} o\left((x - x_0)^n\right),$$

ce qui donne, en divisant par $(x - x_0)^p \neq 0$,

$$(b_p - a_p) =_{x_0} (a_{p+1} - b_{p+1})(x - x_0) + \cdots + (a_n - b_n)(x - x_0)^{n-p} + o\left((x - x_0)^{n-p}\right) \longmapsto_{x \to x_0} 0.$$

Donc $a_p = b_p$, absurde. D'où le résultat. □

Proposition (Somme de développements limités)**.**

Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et f et g deux fonctions à valeurs réelles définies au voisinage de x_0. On suppose que f et g admettent chacune un développement limité d'ordre n en x_0. Alors $f + \alpha g$ admet un développement limité d'ordre n en x_0.
De plus, la partie régulière du développement limité de $f + \alpha g$ est égale à la partie régulière du développement limité de f plus α fois la partie régulière du développement limité de g.

Démonstration. On suppose que

$$f(x) =_{x_0} a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right)$$

et

$$g(x) =_{x_0} b_0 + b_1(x-x_0) + \cdots + b_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right).$$

Alors, par combinaison linéaire de ces égalités,

$$(f+\alpha g)(x) =_{x_0} a_0 + \alpha b_0 + (a_1+\alpha b_1)(x-x_0) + \cdots + (a_n+\alpha b_n)(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right),$$

d'où l'existence du développement limité et l'expression annoncée. □

Proposition (Produit de développements limités)**.**

Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et f et g deux fonctions à valeurs réelles définies au voisinage de x_0. On suppose que f et g admettent chacune un développement limité d'ordre n en x_0. Alors fg admet un développement limité d'ordre n en x_0.
La partie régulière du développement limité de fg est obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le produit des parties régulières de f et g.

Démonstration. (démonstration à connaître) On suppose que

$$f(x) =_{x_0} a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$$

et

$$g(x) =_{x_0} b_0 + b_1(x-x_0) + \cdots + b_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right).$$

Alors, par produit de ces égalités,

$$\begin{aligned}
(fg)(x) &=_{x_0} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i(x-x_0)^i + o\left((x-x_0)^n\right)\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j(x-x_0)^j + o\left((x-x_0)^n\right)\right) \\
&=_{x_0} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i(x-x_0)^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j(x-x_0)^j\right) + o\left((x-x_0)^n\right) + o\left((x-x_0)^n\right) + o\left((x-x_0)^{2n}\right) \\
&=_{x_0} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i+j=k} a_i b_j (x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right),
\end{aligned}$$

d'où l'existence du développement limité et l'expression annoncée. □

2 Formule de Taylor-Young

2.1 Dérivabilité et développements limités

Proposition (Existence d'un développement limité d'ordre 0)**.**

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et f une fonction à valeurs réelles définie en x_0 et au voisinage de ce point. La fonction f est continue en x_0 si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 0 en x_0. On a alors :

$$f(x) =_{x_0} f(x_0) + o(1).$$

Démonstration. (démonstration à connaître) On commence par remarquer que :

$$f \text{ est continue en } x_0 \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \iff f(x) =_{x_0} f(x_0) + o(1).$$

Donc si f est continue en x_0, elle admet bien un développement limité d'ordre 0 en ce point. Réciproquement, s'il existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) =_{x_0} a_0 + o(1)$, alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = a_0$. Donc $a_0 = f(x_0)$ et f est continue en x_0. □

Proposition (Existence d'un développement limité d'ordre 1)**.**

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction à valeurs réelles définie en x_0 et au voisinage de ce point. La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0. On a alors :

$$f(x) =_{x_0} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o((x - x_0)).$$

Démonstration. On commence par remarquer que :

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R} \iff f(x) =_{x_0} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o((x - x_0)).$$

Donc si f est dérivable en x_0, elle admet bien un développement limité d'ordre 1 en ce point. Réciproquement, s'il existe $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) =_{x_0} a_0 + a_1(x - x_0) + o((x - x_0))$, alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = a_0$, donc $a_0 = f(x_0)$. D'où $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =_{x_0} a_1 + o(1)$, ce qui donne $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a_1 \in \mathbb{R}$. Donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = a_1$. D'où le résultat. □

Théorème (Formule de Taylor-Young)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction de classe C^n sur un intervalle I et $x_0 \in I$, alors f admet pour développement limité d'ordre n en x_0

$$f(x) =_{x_0} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o\left((x - x_0)^n\right).$$

Remarque. On peut également écrire $f(x_0 + h) =_0 \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o\left(h^n\right)$.

Remarque. En pratique, la plupart des développements limités sont effectués au voisinage de 0. On pourra donc noter $=$ à la place de $=_0$ quand on manipule des fonctions.

2.2 Développements limités usuels en 0

Toutes les formules qui suivent se montrent avec la formule de Taylor-Young, en utilisant les dérivées connues des fonctions usuelles.

Formule (Développement limité de la fonction exponentielle)**.**

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction exponentielle est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\exp^{(k)} = \exp$. D'après la formule de Taylor-Young, l'exponentielle admet donc pour développement limité à l'ordre n en 0 :

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \exp(0) + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

□

Formule (Développement limité de la fonction logarithme)**.**

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : x \to \ln(1+x)$ est de classe C^n sur $]-1, +\infty[$ et d'après les formules de dérivées usuelles, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\forall x \in]-1, +\infty[$, $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$. D'après la formule de Taylor-Young, f admet donc pour développement limité à l'ordre n en 0 :

$$\ln(1+x) = \ln(1+0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+0)^k} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

□

Formule (Développement limité de la fonction inverse)**.**

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n),$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n).$$

Formule (Développement limité des fonctions puissances)**.**

Pour tout réel α,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\frac{x}{1!} + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \cdots + \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Formule (Développement limité des fonctions trigonométriques)**.**

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}).$$

Remarque. Les exposants $2k$ et $2k+1$ ont été introduits pour permettre d'avoir des formules simples, mais il faut garder à l'esprit que l'ordre d'un développement limité correspond à la puissance qui apparaît dans le o.

2.3 Exemples

Exemple 2. Déterminer un développement limité d'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \cos x$.
On trouve avec les formules précédentes $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Exemple 3. Déterminer un développement limité d'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \cos x$.
On trouve avec les formules précédentes $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$.

Exemple 4. Déterminer un développement limité d'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1+2x} - \exp(x)$.
On trouve avec les formules précédentes :

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$\sqrt{1+2x} = 1 + \frac{1}{2}(2x) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(2x)^2}{2} + o((2x)^2) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

d'où par sommation de développements limités,

$$\sqrt{1+2x} - \exp(x) = -x^2 + o(x^2).$$

Exemple 5. Déterminer un développement limité d'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{1+x}$.
On trouve avec les formules précédentes :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3),$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3),$$

d'où par produit de développements limités,

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x)}{1+x} &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)\right)\\ &= 1 - x + x^2 - x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{2} + o(x^3)\\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3).\end{aligned}$$

Exemple 6. Déterminer un développement limité d'ordre 2 en 1 de $f : x \mapsto \dfrac{\exp x}{x}$.
On utilise la formule de Taylor-Young à l'ordre 2, comme f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^*$. $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{\exp(x)x - \exp(x)}{x^2} = \frac{\exp(x)}{x^2}(x-1), \quad f''(x) = \frac{\exp(x)(2 - 2x + x^2)}{x^3}.$$

Cela donne :

$$\frac{\exp x}{x} =_1 \frac{\exp 1}{1} + (x-1)\frac{\exp 1 - \exp 1}{1^2} + \frac{(x-1)^2}{2}\exp(1)\frac{1}{1^3} + o\left((x-1)^2\right) = e + \frac{e}{2}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right).$$

3 Quelques exemples d'utilisation

3.1 Recherche d'un équivalent et étude d'une limite

Montrer que la fonction f définie sur $]0,1]$ par $\forall x \in]0,1]$, $f(x) = \dfrac{2}{\sin(x)} - \dfrac{2}{\ln(1+x)}$ est prolongeable par continuité en 0.

On commence par tout mettre au même dénominateur pour y voir plus clair : $\forall x \in]0,1]$

$$f(x) = \frac{2}{\sin(x)\ln(1+x)}\left(\ln(1+x) - \sin(x)\right).$$

Les équivalents usuels donnent le comportement du dénominateur : $\sin(x)\ln(1+x) \sim_0 x^2$, ils ne permettent par contre pas de gérer directement le numérateur (puisqu'il est interdit de sommer des équivalents). On cherche donc un développement limité en 0 du numérateur (l'ordre est à déterminer pendant le calcul afin d'obtenir au moins un terme non nul).

$$\ln(1+x) - \sin(x) = x - \frac{x^2}{2} - x + o(x^2) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim_0 -\frac{x^2}{2}.$$

On en déduit que $f(x) \sim_0 -1$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1 \in \mathbb{R}$. La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0.

3.2 Étude d'une série

Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$?

On commence par étudier la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln(1+x).$$

On cherche un développement limité en 0, pour ensuite prendre $x = \frac{1}{n}$ qui sera bien au voisinage de 0. On a que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc par somme de développements limités :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

On en déduit

$$u_n = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donc $u_n \sim \frac{1}{2n^2} \geqslant 0$. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum u_n$ converge également.