Dénombrement

Cours de É. Bouchet – ECS1

5 novembre 2018

Table des matières

1 Techniques de dénombrement

Définition (Cardinal)**.**

Soit A un ensemble fini. On appelle cardinal le nombre de ses éléments, et on le note $\text{Card}(A)$.

Formule (Formule de somme)**.**

Si A et B sont deux ensembles finis *disjoints*, alors

$$\text{Card}\,(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B).$$

Formule (Formule de somme, cas général)**.**

Si A et B sont deux ensembles finis, alors

$$\text{Card}\,(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}\,(A \cap B)\,.$$

Formule (Formule du complémentaire)**.**

Si Ω est un ensemble fini et $A \subset \Omega$, alors

$$\text{Card}\left(\overline{A}\right) = \text{Card}(\Omega) - \text{Card}(A).$$

Démonstration. En effet, $A \cup \overline{A} = \Omega$, et A et $\overline{A}$ sont disjoints, on peut donc appliquer la formule de somme :

$$\text{Card}\left(\overline{A}\right) + \text{Card}(A) = \text{Card}(\Omega).$$

□

Formule (Formule de partition)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit Ω un ensemble fini et $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de sous-ensembles de Ω vérifiant $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ et tels que pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, (on parle alors d'ensembles disjoints deux à deux). Alors

$$\text{Card}(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} \text{Card}(A_i).$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$P(n) : \text{« } \forall (A_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathcal{P}(\Omega)^n,\ \text{si}\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \text{ et } \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset,\ \text{alors}\ \text{Card}(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} \text{Card}(A_i) \text{ »}.$$

— Pour $n=1$, si $A_1=\Omega$, $\mathrm{Card}(\Omega)=\mathrm{Card}(A_1)=\sum_{i=1}^{1}\mathrm{Card}(A_i)$ donc $P(1)$ est vraie.

— Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on suppose que $P(n)$ est vraie. Soit $(A_i)_{i\in[\![1,n+1]\!]}\in\mathcal{P}(\Omega)^{n+1}$, on suppose que $\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i=\Omega$ et que $\forall i\neq j,\ A_i\cap A_j=\emptyset$. Alors $(A_1,\dots,A_{n-1},(A_n\cup A_{n+1}))$ vérifie les hypothèses de $P(n)$, on a donc :

$$\mathrm{Card}(\Omega)=\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{Card}(A_i)+\mathrm{Card}(A_n\cup A_{n+1}).$$

Or $A_n\cap A_{n+1}=\emptyset$, donc par formule de somme, $\mathrm{Card}(A_n\cup A_{n+1})=\mathrm{Card}(A_n)+\mathrm{Card}(A_{n+1})$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

D'où le résultat. □

Formule (Formule du produit)**.**

Si A et B sont deux ensembles finis, alors

$$\mathrm{Card}\,(A\times B)=\mathrm{Card}(A)\times\mathrm{Card}(B).$$

2 Dénombrement des ensembles

2.1 p-listes d'un ensemble à n éléments

Définition (p-liste)**.**

Soit $(p,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$. Soit E un ensemble fini de cardinal n. On appelle **p-liste** de E tout élément de E^p.

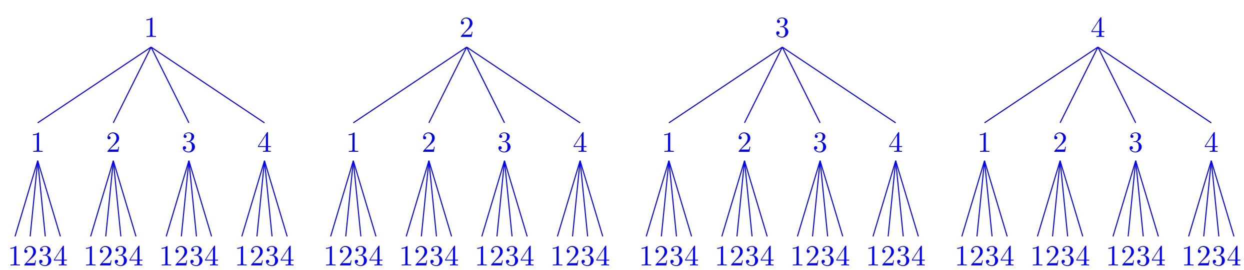
Exemple 1. $(1,2,1)$ est une 3-liste d'éléments de l'ensemble $[\![1,6]\!]$ de cardinal 6.

Proposition (Nombre de p-listes)**.**

Soit $(p,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$. Le nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments est $\mathrm{Card}\,(E^p)=n^p$.

Démonstration. Par la formule du produit, itérée $p-1$ fois, on trouve $\mathrm{Card}\,(E^p)=\mathrm{Card}(E)^p=n^p$. □

Représentation arborescente : Les 3-listes de $[\![1,4]\!]$.



Il y en a au total $4^3=64$.

Exemple 2. On tire trois cartes avec remise dans un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on rencontrer ?
Un tirage de trois cartes avec remise est une 3-liste d'un ensemble à 32 éléments : il y a donc $32^3 = 32768$ possibilités.

2.2 p-liste d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments

Définition (p-liste d'éléments distincts)**.**

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $p \in [\![1, n]\!]$. On appelle **p-liste d'éléments distincts** de E tout élément $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ tel que

$$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2 \text{ tels que } i \neq j, \quad x_i \neq x_j.$$

Exemple 3. $(1, 2, 5)$ est une 3-liste d'éléments distincts de l'ensemble $[\![1, 6]\!]$ de cardinal 6.

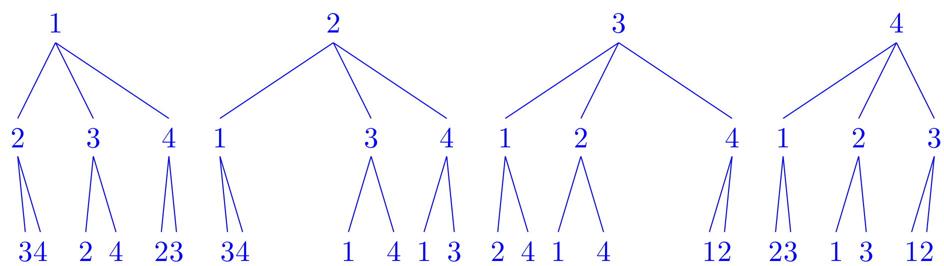
Proposition (Nombre de p-listes d'éléments distincts)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$. Le nombre de p-listes d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments est

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Remarque. Une p-liste d'éléments distincts est également appelée un arrangement de p parmi n ou une p-liste sans répétition.

Représentation arborescente : Les 3-listes d'éléments distincts de $[\![1, 4]\!]$.
On élague des branches de la représentation des 3-listes :



Il y en a au total $A_4^3 = \dfrac{4!}{(4-3)!} = \dfrac{4 \times 3 \times 2}{1} = 24.$

Exemple 4. On tire trois cartes sans remise dans un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on rencontrer ?
Un tirage de trois cartes sans remise est une 3-liste d'éléments distincts d'un ensemble à 32 éléments : il y a donc $A_{32}^3 = \dfrac{32!}{(32-3)!} = 32 \times 31 \times 30 = 29760$ possibilités. On peut vérifier que ce résultat est cohérent : il est bien plus petit que dans le cas avec remise.

2.3 Permutations d'un ensemble à n éléments

Définition (Permutation)**.**

Soit A un ensemble fini. Une permutation de A est une bijection de A sur lui-même.

Remarque. Une permutation de n objets distincts rangés dans un certain ordre correspond à un changement de l'ordre de succession de ces n objets.

Remarque. On représente souvent une permutation en donnant les images successives de ses éléments : c'est plus rapide que de définir explicitement la bijection utilisée.

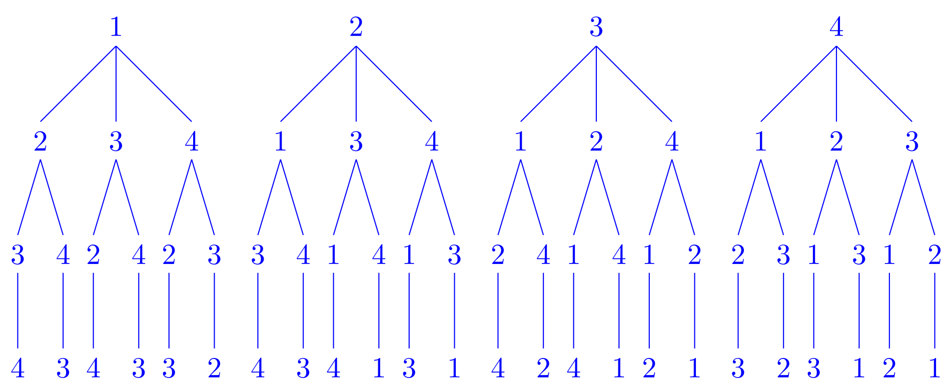
Exemple 5. Si $E = [\![1, 5]\!]$, $(1; 2; 3; 4; 5)$, $(5; 4; 3; 2; 1)$ et $(2; 4; 1; 3; 5)$ sont des permutations de E.

Proposition.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de **permutations** d'un ensemble à n éléments est $n!$.

Démonstration. Ce résultat découle directement du fait que si E est un ensemble à n éléments, une permutation de E est une n-liste d'éléments distincts de E. Il y en a donc $A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$. □

Représentation arborescente : Les permutations de $[\![1, 4]\!]$.



Il y en a au total $4! = 24$.

Exemple 6. De combien de manières différentes peut-on mélanger un jeu de 32 cartes ?
Le nombre de mélanges correspond au nombre de permutations sur les 32 cartes : il y en a $32!$ (de l'ordre de 10^{35}...)

Exemple 7. Combien PERLE a-t-il d'anagrammes ?
Ce mot a 5 lettres, il y a donc a priori $5!$ façon de les mélanger. Mais la lettre E figure deux fois : intervertir les deux lettres E ne modifie pas le mot. Il y a donc $\frac{5!}{2!} = 60$ anagrammes.

2.4 Parties à p-éléments d'un ensemble à n éléments

Définition (Parties à p-éléments d'un ensemble à n éléments)**.**

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et soit $p \in [\![0, n]\!]$. On appelle partie à p éléments de E tout sous-ensemble de E à p éléments.

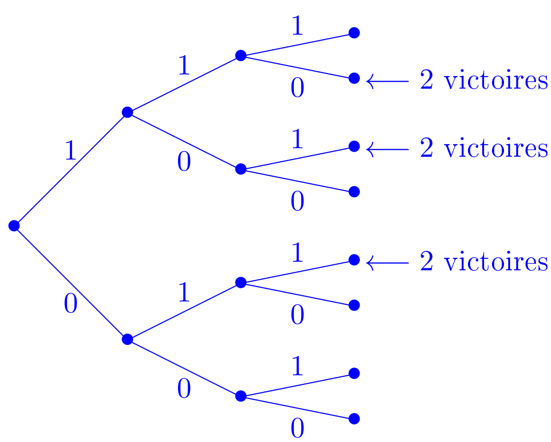
Exemple 8. $\{1,2,5\}$ est une partie à 3 éléments de l'ensemble $[\![1,6]\!]$ de cardinal 6.

Proposition (Nombre de parties à p-éléments d'un ensemble à n éléments)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0,n]\!]$. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de parties à p-éléments de E est

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

Représentation arborescente Les parties à p éléments d'un ensemble à n éléments peuvent être vues comme le nombre de chemins d'un arbre réalisant p succès pour n répétitions. Par exemple, pour $p=2$ et $n=3$:



Il y en a au total $\binom{3}{2} = \dfrac{3 \times 2}{2} = 3$.

Exemple 9. On tire simultanément trois cartes dans un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on rencontrer ?
Un tirage simultané de trois cartes est une partie à 3 éléments d'un ensemble à 32 éléments : il y a donc $\binom{32}{3} = \frac{32\times31\times30}{3!} = 4960$ possibilités. C'est beaucoup moins que le nombre de 3-listes d'éléments distincts, car l'ordre dans lequel on pioche les cartes ne compte pas.

2.5 Parties d'un ensemble à n éléments

Proposition (Parties d'un ensemble à n éléments)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de parties de E est

$$\mathrm{Card}\,(\mathcal{P}\,(E)) = 2^n.$$

Démonstration. (démonstration à connaître) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) =$ « si E est un ensemble fini de cardinal n, $\mathrm{Card}\,(\mathcal{P}\,(E)) = 2^n$ ».

— Le seul ensemble de cardinal 0 est $\emptyset$, et le $\mathcal{P}\,(\emptyset) = \{\emptyset\}$ est de cardinal $1 = 2^0$. Donc $P(0)$ est vraie.
— Soit $n \in \mathbb{N}$ on suppose que $P(n)$ est vraie. Soit E un ensemble fini de cardinal $n+1$, et soit $x \in E$ (existe car $\mathrm{Card}(E) \geqslant 1$). Alors $E = \{x\} \cup E'$, où E' est un ensemble fini de cardinal n. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Alors :
  — Soit $x \notin A$ et $A \in P(E')$.
  — Soit $x \in A$ et on peut écrire $A = \{x\} \cup B$ avec $B \in P(E')$.

Ces deux possibilités sont disjointes. Donc le nombre de parties de E est le nombre de parties contenant x, plus le nombre de parties ne le contenant pas. Dans les deux cas, cela vaut 2^n par $P(n)$. Il y en a donc $2^n + 2^n = 2^{n+1}$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

D'où le résultat annoncé. □

3 Coefficient binomiaux

3.1 Définition et propriétés

Définition (Coefficient binomiaux)**.**

Soit $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$.

— Si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0,n]\!]$ on pose $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$.

— Si $n < 0$ ou $p \notin [\![0,n]\!]$ on pose $\binom{n}{p} = 0$.

Exemple 10. $\binom{8}{4} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 70$.

Formule.

$\forall (n,p) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Exemple 11. $\binom{8}{2} = \binom{8}{8-2} = \binom{8}{6}$.

Démonstration. Si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0,n]\!]$, alors $n-p \in [\![0,n]\!]$, et la définition donne : $\binom{n}{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$. Sinon, les deux termes sont nuls. Dans tous les cas, il y a donc égalité. □

Formule.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. $\forall p \in \mathbb{Z}^*$,

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1},$$

$\forall p \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$,

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)}{p(p-1)}\binom{n-2}{p-2}.$$

Démonstration. On va montrer la première formule, la deuxième s'obtient simplement en itérant la première.

— Si $n \geqslant 1$ et $p \in [\![1,n]\!]$, on a : $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} \overset{p\geqslant 1, n\geqslant 1}{=} \dfrac{n}{p} \dfrac{(n-1)!}{(p-1)!\,((n-1)-(p-1))!} = \dfrac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$, où la dernière égalité est valide car on a bien $p-1 \in [\![0,n-1]\!]$.

— Sinon les deux termes sont nuls.

On a donc bien toujours égalité. □

3.2 Formule de Pascal

Remarque (Représentation ensembliste)**.** Parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [\![1, n-1]\!]$ et E un ensemble fini de cardinal n. On sait qu'il y a $\binom{n}{p}$ possibilités d'obtenir une partie à p éléments de E. Mais pour construire une telle partie à p éléments, on peut aussi écrire $E = E' \cup \{x\}$ puis :

- soit on ne choisit pas x, et on choisit p éléments parmi les $n-1$ de E' : $\binom{n-1}{p}$ possibilités,
- soit on choisit x, et on choisit ensuite $p-1$ éléments parmi les $n-1$ de E' : $\binom{n-1}{p-1}$ possibilités,

ces deux cas étant disjoints. D'où $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.

Formule (Formule de Pascal)**.**

$\forall (n,p) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$

Démonstration. (démonstration à connaître) Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n-1]\!]$, on a aussi $p-1 \in [\![0, n-1]\!]$ et :

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} &= \frac{(n-1)!}{p!\,(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,((n-1)-(p-1))!} \\
&= \frac{(n-1)!}{p!\,(n-1-p)!}\left(1 + \frac{p}{n-p}\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{p!\,(n-1-p)!}\left(\frac{n}{n-p}\right) \\
&= \binom{n}{p}
\end{aligned}$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p = 0$, $\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{-1} = \binom{n-1}{0} + 0 = 1 = \binom{n}{0}$. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p = n$, $\binom{n-1}{n} + \binom{n-1}{n-1} = 0 + 1 = 1 = \binom{n}{n}$. Dans tous les autres cas, les deux membres de la formule sont nuls dont égaux.
La formule est donc vraie pour tout couple d'entiers différent de $(0,0)$. ☐

Corollaire.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) =$ « $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$ ».

- Initialisation : si $n = 0$, $\binom{0}{0} = 1 \in \mathbb{N}$. Donc $P(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $P(n)$ est vraie. Soit $p \in [\![0, n+1]\!]$. Alors par la formule de Pascal,

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}.$$

  Si $p \in [\![1, n-1]\!]$, $P(n)$ garantit que les deux termes de cette somme sont entiers. Par ailleurs, si $p = 0$, $\binom{n}{p-1} = 0$ et $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$ et si $p = n+1$, $\binom{n}{p-1} \in \mathbb{N}$ et $\binom{n}{p} = 0$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Cela montre le résultat annoncé. ☐

Remarque. Le tableau suivant, appelé triangle de Pascal, permet de retrouver facilement les petits coefficients binomiaux :

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	0
5	1	5	10	10	5	1

3.3 Formule du binôme de Newton

Formule (Formule du binôme de Newton)**.**

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration. (démonstration à connaître) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

— $(a+b)^0 = 1$, et $\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$ donc $P(0)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} && \text{Par } P(n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} && \text{en posant } k' = k+1 \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n-k+1} && \text{en séparant } k = 0, n+1 \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} && \text{par la formule de Pascal}
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Cela montre le résultat annoncé. □

Exemple 12. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $(1+x)^4$.

La formule du binôme de Newton donne :

$$(1+x)^4 = \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 + \binom{4}{2} x^2 + \binom{4}{3} x + \binom{4}{4} x^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1.$$

Exemple 13. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ puis donner une interprétation ensembliste de ce résultat en lien avec le cardinal de $\mathcal{P}(E)$.

La formule du binôme de Newton donne :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

Interprétation ensembliste : soit E un ensemble de cardinal n. Pour choisir un élément de $\mathcal{P}(E)$, on peut :

- commencer par choisir son cardinal $k \in [\![0, n]\!]$,
- choisir ensuite les k éléments qui le composent, parmi les $n = \text{Card}(E)$ éléments possibles : il y a $\binom{n}{k}$ possibilités pour faire ce choix lorsque k est fixé.

Ces possibilités correspondent à des cas disjoints, il y a donc $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ possibilités pour choisir un élément de $\mathcal{P}(E)$. Ce nombre correspond donc au cardinal de $\mathcal{P}(E)$, dont on a déjà déterminé qu'il valait 2^n.

Exemple 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

On sait que pour tout entier k non nul, $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$. Donc

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = 0 + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \overset{i=k-1}{=} n\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = n2^{n-1},$$

où la dernière égalité utilise la formule du binôme de Newton.

Exemple 15. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et $p \in [\![0, a+b]\!]$. Montrer la formule de Vandermonde : $\binom{a+b}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{a}{k}\binom{b}{p-k}$.

Première possibilité de preuve : preuve ensembliste. On cherche à choisir astucieusement p éléments dans un ensemble E contenant $a+b$ éléments. On écrit $E = A \cup B$, où $\text{Card}(A) = a$ et $\text{Card}(B) = b$, et on procède comme suit :

- on commence par choisir le nombre $k \in [\![0, p]\!]$ d'éléments à choisir dans A,
- à k fixé, on choisit les k éléments dans A : $\binom{a}{k}$ possibilités,
- on complète ensuite avec $p-k$ éléments de B : $\binom{b}{p-k}$ possibilités.

On a donc par formule de somme (cas disjoint) $\sum_{k=0}^{p} \binom{a}{k}\binom{b}{p-k}$ possibilités de faire ce choix. D'où le résultat.

Deuxième possibilité de preuve : preuve algébrique. On s'intéresse au polynôme $(1+X)^{a+b} = (1+X)^a(1+X)^b$. La formule du binôme de Newton donne :

$$\sum_{p=0}^{a+b} \binom{a+b}{p} X^p = \left(\sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} X^i\right)\left(\sum_{j=0}^{b} \binom{b}{j} X^j\right).$$

On va chercher à développer le membre de droite, pour pouvoir identifier les coefficients du polynôme : pour cela, on commence par déterminer les exposants qui apparaîtront dans le produit, puis on détermine leurs coefficients :

$$\left(\sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} X^i\right)\left(\sum_{j=0}^{b} \binom{b}{j} X^j\right) = \sum_{p=0}^{a+b}\left(\sum_{i+j=p} \binom{a}{i}\binom{b}{j}\right) X^p = \sum_{p=0}^{a+b}\left(\sum_{k=0}^{p} \binom{a}{k}\binom{b}{p-k}\right) X^p,$$

En identifiant les coefficients, on trouve $\forall p \in [\![0, a+b]\!]$,

$$\binom{a+b}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{a}{k}\binom{b}{p-k}.$$