Dérivabilité

Cours de É. Bouchet – ECS1

15 décembre 2020

Table des matières

1 Dérivabilité en un point

Dans ce chapitre, f désigne une fonction d'une variable réelle, définie sur un ensemble E_f et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1.1 Dérivabilité en un point

Définition (Fonction dérivable en un point, nombre dérivé)**.**

Soit $x_0 \in E_f$ et f une fonction définie au voisinage de x_0. On dit que f est **dérivable** en x_0 lorsque $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie. Cette limite est alors notée $f'(x_0)$ et appelée **nombre dérivé** de f en x_0.

Remarque. Cette définition équivaut à dire que f est dérivable en x_0 si et seulement si

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Remarque. On pourra parfois rencontrer les notations alternatives suivantes : $f'(x_0) = Df(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$.

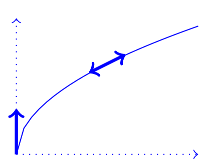
Proposition (Tangente à la courbe)**.**

Soit $x_0 \in E_f$ et f une fonction définie au voisinage de x_0. Si f est dérivable en x_0, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ une tangente Δ d'équation :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

Remarque. Si $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ alors f n'est pas dérivable en x_0 et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

Exemple 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $x \mapsto \sqrt{x}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et admet donc les tangentes :



1.2 Dérivabilité à gauche et à droite

Définition (Dérivée à droite ou à gauche en un point)**.**

Soit $x_0 \in E_f$ et f une fonction définie au voisinage de x_0. On dit que f est **dérivable à droite** (respectivement **dérivable à gauche**) en x_0 lorsque

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad \left(\text{resp. } \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$$

existe et est finie. On note alors cette limite $f'_d(x_0)$ (resp. $f'_g(x_0)$).

Proposition (Demi-tangente à la courbe)**.**

Soit $x_0 \in E_f$ et f une fonction définie au voisinage de x_0. Si f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0, alors $\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente à droite (resp. à gauche) d'équation :

$$y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0) \qquad \left(\text{resp. } y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0)\right),$$

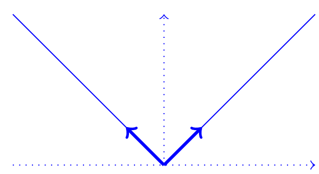
avec $x \geqslant x_0$ (resp. $x \leqslant x_0$).

Exemple 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto |x|$.

— Elle est dérivable à droite en 0, et $f'_d(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - 0}{x - 0} = 1.$

— Elle est dérivable à gauche en 0, et $f'_g(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x - 0}{x - 0} = -1.$

Si l'on trace la courbe :



Proposition.

Soit $x_0 \in E_f$ et f une fonction définie au voisinage de x_0. Si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et si $f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = \ell$, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.

Démonstration. D'après le chapitre sur les limites de fonction, le taux d'accroissement de f en x_0 admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0 si et seulement si il admet des limites à droite et à gauche égales à ℓ en x_0. D'où le résultat. □

1.3 Dérivabilité et continuité

Proposition.

Toute fonction f dérivable en un point x_0 est continue en x_0.

Démonstration. On cherche à établir un lien entre f et son taux d'accroissement autour du point x_0. Cependant, le taux d'accroissement de f en x_0 n'est pas défini au point x_0. On introduit donc la fonction φ définie au voisinage de x_0 par :

$$\forall x \neq x_0, \quad \varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{et} \quad \varphi(x_0) = f'(x_0).$$

Par définition de $f'(x_0)$, φ est continue au point x_0 (φ est le prolongement par continuité en x_0 du taux d'accroissement), et pour tout x dans un voisinage de x_0,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\varphi(x).$$

Donc f est continue en x_0 par somme et produit de fonctions continues en x_0. □

Remarque. Attention : La réciproque est FAUSSE, la continuité n'implique pas la dérivabilité.

Exemple 3. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto |x|$, est continue, mais pas dérivable en 0.

1.4 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition (Linéarité)**.**

Soient u et v deux fonctions dérivables en un point x_0 et α un réel. Alors la fonction $\alpha u + v$ est dérivable en x_0, et

$$(\alpha u + v)'(x_0) = \alpha u'(x_0) + v'(x_0).$$

Démonstration. On se place au voisinage de x_0. Pour tout $x \neq x_0$,

$$\frac{(\alpha u + v)(x) - (\alpha u + v)(x_0)}{x - x_0} = \frac{(\alpha u(x) + v(x)) - (\alpha u(x_0) + v(x_0))}{x - x_0} = \alpha \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}.$$

Or u et v sont dérivables en x_0, donc les deux termes de droite admettent une limite finie en x_0. Donc $\alpha u + v$ est dérivable en x_0 et on obtient par passage à la limite :

$$(\alpha u + v)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(\alpha u + v)(x) - (\alpha u + v)(x_0)}{x - x_0} = \alpha u'(x_0) + v'(x_0).$$

□

Proposition (Dérivée d'un produit et d'un quotient)**.**

Soient u et v deux fonctions dérivables en un point x_0. Alors la fonction uv est dérivable en x_0, et

$$(uv)'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0).$$

Si de plus, la fonction v ne s'annule pas au voisinage de x_0, alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable en x_0, et

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v(x_0)^2}.$$

Démonstration. On se place au voisinage de x_0. Pour tout $x \neq x_0$,

$$\frac{(uv)(x) - (uv)(x_0)}{x - x_0} = \frac{u(x)v(x) - u(x_0)v(x_0)}{x - x_0} = u(x)\frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} + v(x_0)\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0},$$

or u et v sont dérivables en x_0 et u est continue (car dérivable) en x_0, donc le membre de droite admet une limite par produit et somme de limites. Donc uv est dérivable en x_0 et par passage à la limite :

$$(uv)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(uv)(x) - (uv)(x_0)}{x - x_0} = u(x_0)v'(x_0) + v(x_0)u'(x_0).$$

De plus, pour tout $x \neq x_0$,

$$\frac{\frac{1}{v}(x) - \frac{1}{v}(x_0)}{x - x_0} = -\frac{1}{v(x)v(x_0)} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}.$$

Comme v est dérivable et continue en x_0, le membre de droite admet bien une limite. Donc $\frac{1}{v}$ est dérivable en x_0 et par passage à la limite :

$$\left(\frac{1}{v}\right)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{v}(x) - \frac{1}{v}(x_0)}{x - x_0} = -\frac{1}{v(x_0)^2} v'(x_0).$$

Le résultat sur le quotient découle ensuite directement de ceux sur le produit et l'inverse. □

Proposition.

Soient f une fonction dérivable en un point x_0 et g une fonction dérivable en $f(x_0)$. Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0, et
$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \cdot (g' \circ f)(x_0).$$

Démonstration. On se place au voisinage de x_0. Pour tout $x \neq x_0$, on aimerait écrire :
$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$
pour faire apparaître les taux d'accroissement de f et g. Mais rien ne garantit la non-annulation de $f(x) - f(x_0)$. On va donc utiliser une fonction auxiliaire pour contourner ce problème. Soit φ la fonction définie au voisinage de $f(x_0)$ par :
$$\varphi(y) = \frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} \text{ si } y \neq f(x_0) \quad \text{et} \quad \varphi(f(x_0)) = g'(f(x_0)).$$
Par définition de $g'(f(x_0))$, φ est continue au point $f(x_0)$. Et pour tout $x \neq x_0$,
$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} = \varphi(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$
Comme f est dérivable en x_0, f est continue en x_0 et φ est continue en $f(x_0)$, le membre de droite admet bien une limite en x_0. Donc $g \circ f$ est dérivable en x_0 et par passage à la limite :
$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} = \varphi(f(x_0)) f'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0).$$
□

2 Dérivabilité sur un intervalle

2.1 Définition

Définition (Dérivée sur un intervalle, fonction dérivée)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et soit f une fonction définie sur I.
On dit que la fonction f est **dérivable** sur I lorsque f est dérivable en tout point de I (sauf pour les bornes de I, pour lesquelles on se restreint à la dérivabilité à droite ou à gauche).
On définit alors la **fonction dérivée** de f notée f', définie sur I par $f' : x \mapsto f'(x)$.

Remarque. On a toujours $E_{f'} \subset E_f$ mais pas toujours l'égalité.

Remarque. ATTENTION : Une fonction peut être dérivable sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$ sans être dérivable sur $[a, c]$. L'étude locale de la dérivabilité en b est indispensable pour affirmer qu'elle est dérivable sur $[a, c]$.

Exemple 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \geqslant 0$, $f(x) = x^2$ et $\forall x < 0$, $f(x) = 0$. Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
Il est immédiat que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, car elle coïncide sur ces intervalles avec des fonctions polynômes. Mais il faut étudier le raccord en 0 avant de conclure à la dérivabilité sur $\mathbb{R}$.
$$\forall x < 0, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0, \qquad \forall x > 0, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2}{x} = x.$$
Donc f est dérivable à droite et à gauche en 0, et $f'_d(0) = 0 = f'_g(0)$. Donc f est dérivable en 0 et f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2.2 Formulaire

Les dérivées de combinaison linéaires, de produits ou de composées s'effectuent exactement comme pour le cas des dérivées en un point, pour tout intervalle inclus dans l'ensemble de définition des fonctions dérivées.
Les dérivées classiques suivantes sont à connaître :

$\forall x \in E_f, f(x) =$	E_f	$E_{f'}$	$\forall x \in E_{f'}, f'(x) =$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x
$\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$
k (constante)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$ ($n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$)	$\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^*$)	$\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^*$)	nx^{n-1}
x^α, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$1 + (\tan x)^2$
a^x ($a \in \mathbb{R}_+^*$)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$a^x \ln a$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, on obtient par composition (en précisant les conditions de validité) les formules suivantes, classiques également :

fonction du type	dérivée
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$
u^α	$\alpha u' u^{\alpha-1}$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\cos u$	$-u' \sin u$

Proposition (Dérivée d'une fonction polynomiale).

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_i)_{i\in[\![0,n]\!]} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$.

Proposition (Dérivée de la fonction réciproque).

Soit f une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle I et à valeurs dans $J = f(I)$. Soit $a \in I$. La fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$ et lorsqu'elle est dérivable :

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration. La fonction f est continue sur I (car dérivable) et strictement croissante sur cet intervalle. D'après le théorème de la bijection, elle réalise donc bien une bijection de I sur $J = f(I)$ et f^{-1} existe et est continue (et strictement monotone) sur J.
Soit $b \in J$ et a son unique antécédent par f. On a $b = f(a)$, donc $a = f^{-1}(b)$. Pour tout $y \in J \setminus \{b\}$,

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(y) - a}{f(f^{-1}(y)) - f(a)}.$$

Or f^{-1} est continue sur J, donc en b. Donc $\lim_{y\mapsto b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a$. Par continuité de f sur I, composition de limites et dérivabilité de f en a, on trouve alors :

$$\lim_{y\mapsto b} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Si $f'(a) = 0$, par passage à l'inverse $\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b}$ n'admet pas de limite finie en b, donc f^{-1} n'est pas dérivable en b.
Si par contre $f'(a) \neq 0$, la limite de l'inverse est finie donc f^{-1} est dérivable en b et on trouve :

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y\mapsto b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

Exemple 5. Utiliser ce résultat pour retrouver la dérivabilité du logarithme en utilisant celle de l'exponentielle.
exp est une fonction bijective strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, de réciproque ln. On sait que exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \exp(x) \neq 0$. Sa réciproque ln est donc dérivable sur l'ensemble de son ensemble de définition et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$

Exemple 6. Trouver les ensembles de dérivabilité des fonctions suivantes et donner l'expression des dérivées :

1. f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = \cos(3x) + 2\sin(x)$.
   Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f_1'(x) = -3\sin(3x) + 2\cos(x)$.

2. f_2 définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f_2(x) = 2\sqrt{x^3}$.
   Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $f_2'(x) = 2\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3}} = \dfrac{3x^2}{\sqrt{x^3}} = 3\sqrt{x}$ car $x \geqslant 0$.
3. f_3 définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $f_3(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$.
   Elle est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, et $f_3'(x) = \dfrac{2x(x-2)-(x^2+1)}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2-4x-1}{(x-2)^2}$.

2.3 Fonction de classe C^1 sur un intervalle

Définition (Fonction de classe C^1)**.**

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I. On dit que f est **de classe** C^1 sur I lorsque f est dérivable sur I et que sa dérivée f' est continue sur I.

Exemple 7. Les fonctions polynômes, la fonction exponentielle, les fonction cosinus et sinus sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Proposition (Espace vectoriel des fonctions de classe C^1)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions de classe C^1 sur I, noté $C^1(I)$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. On va montrer que c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$:
- La fonction nulle est dérivable sur I, et sa dérivée est la fonction nulle, continue sur I, donc la fonction nulle est de classe C^1 sur I, et $C^1(I)$ est non vide.
- Soit f et g deux fonctions de $C^1(I)$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Par les propositions précédente, $\lambda f + g$ est dérivable sur I, de dérivée $\lambda f' + g'$. Comme f et g sont de classe C^1, f' et g' sont continues sur I. Par combinaison linéaire de fonctions continues, $\lambda f' + g'$ est continue sur I. Donc $\lambda f + g \in C^1(I)$.

Donc $C^1(I)$ est un sous espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, c'est donc un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
$\square$

3 Principaux théorèmes concernant les dérivées

3.1 Caractérisation d'un extremum local pour une fonction dérivable

Théorème (Caractérisation d'un extremum par la dérivée)**.**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$ qui n'est pas une borne de I. Si f admet un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Démonstration. (démonstration à connaître) Supposons que f possède un maximum local en x_0. Il existe alors un réel $\alpha > 0$ tel que $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset I$ et $\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $f(x) \leqslant f(x_0)$.
Donc, pour tout $x \in]x_0, x_0 + \alpha]$,
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0.$$

Or f est dérivable en x_0 par hypothèse. On peut donc passer à la limite dans cette inégalité et on trouve $f'(x_0) \leqslant 0$.
De même, pour tout $x \in [x_0 - \alpha, x_0[$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0,$$

ce qui donne $f'(x_0) \geqslant 0$. Donc $f'(x_0) = 0$. □

Remarque. ATTENTION : la réciproque est fausse ! Il se peut que $f'(x_0) = 0$ sans que f n'admette d'extremum en x_0.

Exemple 8. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3$ a une dérivée nulle en 0, mais n'atteint ni un maximum ni un minimum en ce point.

Exemple 9. Trouver les extremums locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + x$.
La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 4x^3 + 1.$$

Cette dérivée s'annule si et seulement si $x^3 = -\dfrac{1}{4}$. Il y a une seule solution réelle, $-\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$, et la dérivée est négative avant et positive après. Donc la fonction est décroissante avant $-\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$, et croissante ensuite. On en conclut que la fonction admet un minimum local en $-\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$. Comme la dérivée ne s'annule pas ailleurs, et qu'il n'y a pas de borne ou de point où la fonction n'est pas dérivable, cela signifie que la fonction n'admet pas de maximum.

3.2 Théorème de Rolle

Théorème (Théorème de Rolle)**.**

Soit $a < b$. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et qui vérifie $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

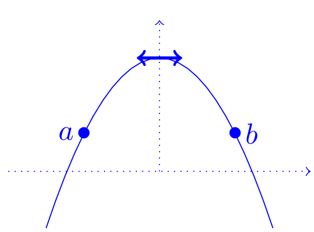
Démonstration. (démonstration à connaître) La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$ donc par le théorème des bornes elle y est bornée et atteint ses bornes. On note m le minimum global et M le maximum global.

— Si $m = M$, la fonction est constante sur $[a, b]$, et donc f' est nulle sur $]a, b[$. Dans ce cas, on peut choisir n'importe quel $c \in]a, b[$ qui conviendra.
— Si $m \neq M$, l'une de ces valeurs au moins n'est atteinte ni en a ni en b (puisque $f(a) = f(b)$). Supposons qu'il s'agit de M (un raisonnement analogue se fait avec m). Il existe alors $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M$. Comme la fonction admet un maximum en c, sa dérivée s'annule par le théorème précédent. D'où le résultat.

□

Remarque. Le réel c n'est pas forcément unique.

Remarque. Interprétation graphique : il existe donc un point de la courbe admettant une tangente parallèle à l'axe des abscisses.



3.3 Accroissements finis

Théorème (Égalité des Accroissements Finis)**.**

Soit $a < b$. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Démonstration. On se ramène aux hypothèses du théorème de Rolle. Pour tout $x \in [a,b]$, on pose :

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

La fonction g est continue sur $[a,b]$ comme somme de fonctions continues, et elle est dérivable sur $]a,b[$ comme somme de fonctions dérivables. Et pour tout $x \in]a,b[$,

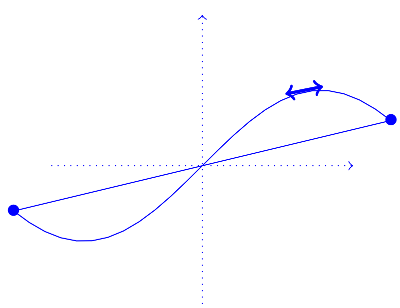
$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

On remarque que $g(b) = g(a) = f(a)$. Donc g vérifie les hypothèses du théorème de Rolle, et il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. Et donc tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Remarque. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le coefficient directeur de la corde $[AB]$, donc il existe un point de $\mathcal{C}_f$ admettant une tangente parallèle à cette corde.



Théorème (Inégalité des Accroissements Finis)**.**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et telle qu'il existe deux réels m et M qui vérifient : $\forall x \in I$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$. Alors $\forall (a,b) \in I^2$ tels que $a \leqslant b$,

$$m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a).$$

Démonstration. Si $a = b$, le résultat est évident. Sinon, l'égalité des accroissements finis appliquée à la fonction f sur $[a,b]$ donne l'existence d'un $c \in]a,b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Les bornes sur f' donnent par ailleurs $m \leqslant f'(c) \leqslant M$ et donc

$$m \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M.$$

Il suffit alors de tout multiplier par $(b - a) \geqslant 0$ pour obtenir le résultat annoncé. □

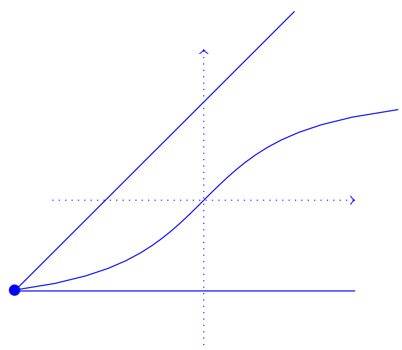
Théorème (Inégalité des Accroissements Finis, deuxième version)**.**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et telle qu'il existe un réel K qui vérifie : $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leqslant K$. Alors $\forall (a,b) \in I^2$,

$$|f(b) - f(a)| \leqslant K\,|b-a|\,.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la première version de l'inégalité des accroissements finis entre $\min(a,b)$ et $\max(a,b)$ en posant $m = -K$ et $M = K$. □

Remarque. Interprétation géométrique. Ce résultat permet d'encadrer les valeurs de la fonctions entre deux droites passant par $(a, f(a))$:



3.4 Caractérisation des fonctions constantes et monotones

Proposition (Variations de fonctions dérivables)**.**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :

- f est croissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0$.
- f est constante sur I si et seulement si : $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.

Démonstration. On va montrer le premier point. Le deuxième point s'obtient en appliquant le premier point à $-f$, et le troisième point s'obtient avec la réunion des deux premiers points.

- Supposons que f est croissante sur I. Soit $x_0 \in I$, pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, on a :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

  Par passage à la limite (la limite existe et est finie par définition de $f'(x_0)$), on obtient $f'(x_0) \geqslant 0$. Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in I$, cela donne la positivité de f' sur I.
- Supposons que $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$. Soit x et y dans I tels que $x \leqslant y$. La fonction f étant dérivable sur I, l'inégalité des accroissements finis (dont on utilise seulement la partie minoration) donne :

$$0(y - x) \leqslant f(y) - f(x).$$

  D'où $f(x) \leqslant f(y)$. Comme c'est vrai pour tout couple (x,y) tel que $x \leqslant y$, la fonction f est croissante sur I. □

Remarque. On peut adapter ce résultat pour montrer la stricte monotonie : soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$,

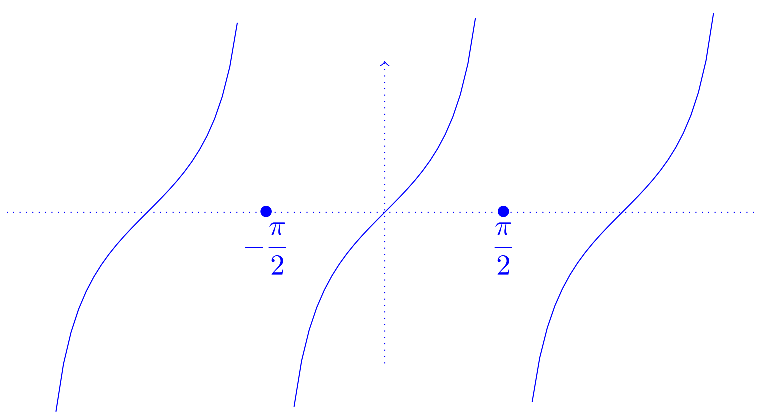
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
- Plus généralement, si pour tout $x \in J$, $f'(x) > 0$, où J est l'intervalle I auquel on a retiré un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I (Cette propriété peut même s'appliquer s'il existe un nombre fini de points où f n'est pas dérivable).

4 Fonction arc tangente

4.1 Fonction tangente

Définition (Tangente)**.**

La fonction **tangente** est la fonction définie sur $I = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}[$ par : $\forall x \in I$, $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.



Proposition (Dérivée de tangente)**.**

La fonction tangente est dérivable sur $I = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}[$, et $\forall x \in I$, $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2 = \dfrac{1}{\cos(x)^2}$.

Démonstration. La fonction est dérivable comme quotient de fonctions dérivables, et par quotient, $\forall x \in I$,

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - (-\sin(x))\sin(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2},$$

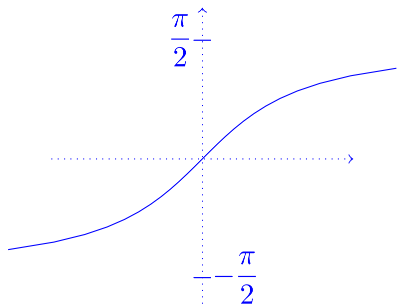
ce qui donne les deux formules annoncées. □

4.2 Fonction arc tangente

Définition (Arc tangente)**.**

La restriction de la fonction tangente à l'intervalle $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est une bijection strictement croissante de $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est appelée **arc tangente**, et est notée arctan.

Démonstration. (démonstration à connaître) La fonction tangente est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, de dérivée $1+\tan(x)^2 > 0$, donc elle est strictement croissante sur cet intervalle. Elle est de plus continue (car dérivable) sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Donc par le théorème de la bijection, elle effectue une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\tan\left(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right)$. En étudiant les limites de tan en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, on trouve $-\infty$ et $+\infty$, ce qui montre que tan est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. Donc la bijection réciproque existe bien, d'où la preuve de l'existence. □



Remarque. Le théorème de la bijection donne au passage que la fonction arc tangente est une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Proposition (Dérivée de arc tangente)**.**

La fonction arc tangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Démonstration. (démonstration à connaître) On utilise la formule de la dérivée de la réciproque : tangente est dérivable et strictement monotone sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et sa dérivée ne s'annule jamais. Donc arc tangente est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$, et : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+\tan\left(\arctan(x)\right)^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

□