# Dérivées successives

Cours de É. Bouchet – ECS1

4 février 2021

## Table des matières

# 1 Dérivées successives

## 1.1 Définitions

Dans tout le chapitre, on note $f$ une fonction réelle définie sur un ensemble $E_f$ et $I$ un intervalle de $E_f$ non vide et non réduit à un point.

**Définition** (Classe $C^1$, rappels)**.**

On dit que $f$ est **de classe** $C^1$ sur $I$ lorsque $f$ est dérivable sur $I$ et que $f'$ est continue sur $I$. On note alors $f \in C^1(I, \mathbb{R})$.

**Définition** (Classe $C^2$)**.**

On dit que $f$ est deux fois dérivable sur $I$ lorsque $f$ est de classe $C^1$ sur $I$ et que $f'$ est dérivable sur $I$. On note alors $(f')' = f^{(2)}$.
On dit que $f$ est **de classe** $C^2$ sur $I$ lorsque $f$ est deux fois dérivable sur $I$ et que $f^{(2)}$ est continue sur $I$. On note alors $f \in C^2(I, \mathbb{R})$.

On peut ensuite définir récursivement toutes les dérivées suivantes : soit $p$ un entier naturel non nul, si $f^{(p)}$ est dérivable sur $I$ alors $f$ est $(p+1)$ fois dérivable sur $I$, avec pour tout $x \in I$, $f^{(p+1)}(x) = \left(f^{(p)}\right)'(x)$. Si, de plus, $f^{(p+1)}$ est continue sur $I$ alors $f$ est de classe $C^{p+1}$ sur $I$.

**Définition** (Classe $C^\infty$)**.**

On dit que $f$ est **de classe** $C^\infty$ sur $I$ lorsque $f$ est indéfiniment dérivable, c'est à dire dérivable à tout ordre. On note alors $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$.

**Remarque.** Si $f$ est continue sur $I$, on notera par convention $f \in C^0(I, \mathbb{R})$ et $f^{(0)} = f$.

## 1.2 Dérivées successives des fonctions usuelles

La plupart des fonctions usuelles sont de classe $C^\infty$ sur tout intervalle inclus dans leur domaine de dérivabilité. Les formules suivantes se montrent par récurrence :

| $f(x)$ | $D_{f'}$ | $f^{(n)}(x)$ |
|---|---|---|
| $e^x$ | $\mathbb{R}$ | $e^x$ |
| $x^p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ | $\mathbb{R}$ | $\begin{cases} \dfrac{p!}{(p-n)!}x^{p-n} & \text{si } n \leqslant p \\ 0 & \text{si } n > p \end{cases}$ |
| $x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N})$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} = \left(\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha - i)\right)x^{\alpha-n}$ |

| $f(x)$ | $D_{f'}$ | $f^{(n)}(x)$ |
|---|---|---|
| $\cos x$ | $\mathbb{R}$ | $\cos\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$ |
| $\sin x$ | $\mathbb{R}$ | $\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$ |
| $\dfrac{1}{a+x}$ | $\mathbb{R}\setminus\{-a\}$ | $\dfrac{(-1)^n n!}{(a+x)^{n+1}}$ |
| $\dfrac{1}{a-x}$ | $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ | $\dfrac{n!}{(a-x)^{n+1}}$ |

## 2 Règles de calcul

### 2.1 Linéarité et ordre des dérivées

**Proposition** (Linéarité des dérivées successives)**.**

Soit $p \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et soient $f$ et $g$ des fonctions de classe $C^p$ sur l'intervalle $I$. Alors :
- $f+g$ est de classe $C^p$ sur $I$ et $(f+g)^{(p)} = f^{(p)} + g^{(p)}$.
- $\alpha f$ est de classe $C^p$ sur $I$ et $(\alpha f)^{(p)} = \alpha f^{(p)}$.

*Démonstration.* On montre le résultat par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ en utilisant pour l'hérédité la linéarité de la dérivée. □

**Corollaire.**

Soit $p \in \mathbb{N}$, alors $C^p(I, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

*Démonstration.* Soit $p \in \mathbb{N}$.
- La fonction nulle est dans $C^p(I, \mathbb{R})$, l'ensemble est donc non vide.
- La proposition précédente donne la stabilité par combinaison linéaire.

$C^p(I, \mathbb{R})$ est ainsi un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions définies sur $I$. C'est donc un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. □

**Remarque.** On peut montrer de même que $C^\infty(I, \mathbb{R})$ est également un espace vectoriel.

**Corollaire** (Dérivées d'une fonction polynomiale)**.**

Soit $p \in \mathbb{N}$. La dérivée $(p+1)$-ème d'une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $p$ est nulle.

**Proposition** (Ordre des dérivées)**.**

Soit $p \in \mathbb{N}$, et soit $f$ une fonction de classe $C^p$ sur l'intervalle $I$. Alors :
- $\forall (m,q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $m+q \leqslant p$, $\left(f^{(m)}\right)^{(q)} = \left(f^{(q)}\right)^{(m)} = f^{(m+q)}$.
- $\forall m \in [\![0, p-1]\!]$, $\left(f^{(m)}\right)' = (f')^{(m)} = f^{(m+1)}$.

### 2.2 Formule de Leibniz

**Théorème** (Formule de Leibniz)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $f$ et $g$ des fonctions de classe $C^n$ sur l'intervalle $I$. Alors la fonction $fg$ est de classe $C^n$ sur $I$ et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

*Démonstration.* (démonstration à connaître) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) =$ « soient $(f,g) \in C^n(I)^2$, alors $fg \in C^n(I)$ et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ ».

— Soit $n = 0$, le produit de deux fonctions continues sur $I$ est une fonction continue sur $I$, et $(fg)^{(0)} = fg = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-k)}$. Donc $P(0)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ est vraie. Soient $f$ et $g$ des fonctions de classe $C^{n+1}$ sur $I$. Alors $f$ et $g$ sont aussi de classe $C^n$, et l'hypothèse de récurrence nous donne : $fg$ est de classe $C^n$, et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f^{(k)}$ est de classe $C^{n+1-k}$, et donc au moins de classe $C^1$. De même, $g^{(n-k)}$ est de classe $C^{n+1-n+k}$, et donc au moins de classe $C^1$. Donc par produit et somme de fonctions de classe $C^1$, $(fg)^{(n)}$ est de classe $C^1$. Ce qui signifie que $fg$ est de classe $C^{n+1}$. On obtient alors en dérivant la relation précédente :

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left( f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \binom{n}{0} f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1} g f^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \text{ par la formule de Pascal}
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie, ce qui termine la preuve.

□

**Exemple 1.** Étudier la dérivabilité de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^x$, et calculer ses dérivées.
On applique la formule de Leibniz à $x \to e^x$ et $g : x \to x^2$ qui sont de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donc $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour tout réel $x$,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^x g^{(k)}(x).$$

On en déduit par propriétés des dérivées d'un polynôme :

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} e^x g^{(k)}(x) = e^x x^2 + n e^x 2x + \frac{n(n-1)}{2} e^x 2 = e^x \left( x^2 + 2nx + n(n-1) \right).$$

On vérifie ensuite que la formule s'applique aussi pour $n = 0$ et $n = 1$, ce qui est bien le cas ici : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

### 2.3 Théorème de composition

**Théorème.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point, $f$ une application définie de $I$ dans $\mathbb{R}$ et $g$ une application définie de $J$ dans $\mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$. Alors :

— Si $f$ est dérivable $n$ fois sur $I$ et $g$ est dérivable $n$ fois sur $J$, alors $g \circ f$ est dérivable $n$ fois sur $I$.

— Si $f$ et $g$ sont de classe $C^n$ respectivement sur $I$ et $J$ alors $g \circ f$ est de classe $C^n$ sur $I$.

*Démonstration.* On montre le premier point, le deuxième se montre avec une démarche similaire. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) =$ « si $f$ est dérivable $n$ fois sur $I$ et $g$ est dérivable $n$ fois sur $J$, alors $g \circ f$ est dérivable $n$ fois sur $I$ ».

— Soit $n = 0$, et $f$ et $g$ deux fonctions dérivables 0 fois sur $I$ et $J$ respectivement. Alors $g \circ f$ est dérivable 0 fois sur $I$ et $P(0)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie. Soit $f$ et $g$ deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur $I$ et $J$ respectivement. Elles sont en particulier dérivables, et par théorème de dérivation des fonctions composées, $g \circ f$ est dérivable sur $I$, avec $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$. Par hypothèse, les fonctions $g'$ et $f$ sont $n$ fois dérivables sur $J$ et $I$ respectivement, et donc par $P(n)$ $(g' \circ f)$ est $n$ fois dérivable sur $I$. Comme de plus $f'$ est $n$ fois dérivable sur $I$, par produit $(g \circ f)'$ est $n$ fois dérivable. Donc $g \circ f$ est $n+1$ fois dérivable, et $P(n+1)$ est vraie.

D'où le résultat. □

**Corollaire.**

Soit $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point, $f$ une application définie de $I$ dans $\mathbb{R}$ et $g$ une application définie de $J$ dans $\mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$. Si $f$ et $g$ sont de classe $C^\infty$ respectivement sur $I$ et $J$ alors $g \circ f$ est de classe $C^\infty$ sur $I$.

## 3 Formules de Taylor

### 3.1 Formule de Taylor avec reste intégral

**Théorème** (Formule de Taylor avec reste intégral (à l'ordre $n$))**.**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f$ une fonction de classe $C^{n+1}$ sur l'intervalle $I$. Pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

On appelle $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ la **partie polynomiale** de la formule, et $\displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$ le **reste intégral d'ordre** $n$.

*Démonstration.* (démonstration à connaître) Soit $n \in \mathbb{N}$, et $(a, b) \in I^2$. On pose :
$P(n) =$ « si $f \in C^{n+1}(I)$, alors $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$ ».

— Pour $n = 0$, soit $f$ une fonction de classe $C^1$ sur $I$, alors $f'$ est continue, de primitive $f$, et on a :

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a),$$

d'où : $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)dt$. Donc $P(0)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vrai. Soit $f$ une fonction de classe $C^{n+2}$ sur $I$. Elle est donc aussi en particulier de classe $C^{n+1}$ et on trouve en appliquant $P(n)$ :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Comme $f$ est de classe $C^{n+2}$ sur $I$, $f^{(n+1)}$ est de classe $C^1$ sur $I$. Or $t \to \frac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ est également de classe $C^1$ sur $I$, on peut donc transformer l'intégrale par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt &= \left[\frac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^b - \int_a^b \frac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt.\end{aligned}$$

En remplaçant dans la relation précédente, on obtient

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt,$$

donc $P(n+1)$ est vraie. Ce qui termine la preuve.

$\square$

**Remarque.** En particulier, si $f$ est une fonction de classe $C^{n+1}$ sur l'intervalle $I$ contenant 0, alors pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Cette formule sera particulièrement utile dans le chapitre sur les développements limités.

**Remarque.** Si $P$ est une fonction polynôme de degré $n$ définie sur $\mathbb{R}$ alors $P$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $P^{(n+1)} = 0$. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

et on retrouve la formule de Taylor pour les polynômes.

## 3.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

**Théorème** (Inégalité de Taylor-Lagrange)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $f$ une fonction de classe $C^{n+1}$ sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $m$ et $M$ deux réels tels que $\forall t \in I$, $m \leqslant f^{(n+1)}(t) \leqslant M$. Alors $\forall (a,b) \in I^2$ tels que $a \leqslant b$,

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} m \leqslant f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} M.$$

**Remarque.** Attention : contrairement à la formule de Taylor avec reste intégral, cette inégalité de Taylor-Lagrange nécessite $a \leqslant b$.

*Démonstration.* (démonstration à connaître) On applique la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n$, dont les hypothèses sont vérifiées :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Comme pour tout $t \in [a,b]$, $m \leqslant f^{(n+1)}(t) \leqslant M$, on obtient par produit avec $\frac{(b-t)^n}{n!} \geqslant 0$ :

$$\frac{(b-t)^n}{n!} m \leqslant \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \leqslant \frac{(b-t)^n}{n!} M,$$

puis par croissance de l'intégrale (comme $a \leqslant b$),

$$m \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} dt \leqslant \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \leqslant M \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} dt.$$

En intégrant, et en remplaçant dans la formule avec le reste intégral, on trouve directement :

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} m \leqslant f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} M.$$

□

**Théorème** (Inégalité de Taylor-Lagrange, deuxième version).

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $f$ une fonction de classe $C^{n+1}$ sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in I$, $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant K$. Alors $\forall (a,b) \in I^2$,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} K.$$

*Démonstration.* Si $a \leqslant b$, il suffit d'appliquer la première version de l'inégalité à $m = -K$ et $M = K$. Si $b \leqslant a$, on reprend la preuve en l'adaptant : par la formule de Taylor avec reste intégral,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| = \left| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \right| = \left| \int_b^a \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \right|.$$

Puisque $b \leqslant a$, l'inégalité triangulaire pour les intégrales donne :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \int_b^a \left| \frac{(b-t)^n}{n!} \right| \left| f^{(n+1)}(t) \right| dt \leqslant K \int_b^a \frac{(t-b)^n}{n!} dt = K \frac{(a-b)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

D'où le résultat annoncé. □

### 3.3 Exemples

**Exemple 2.** Montrer que pour tout $x > 0$, $\ln(1+x) \geqslant x - \dfrac{x^2}{2}$.

La fonction $f : t \longrightarrow \ln(1+t)$ est de classe $C^\infty$ sur $[0, +\infty[$, donc en particulier de classe $C^2$, et on a : $\forall t > 0$,

$$f'(t) = \frac{1}{t+1}, \quad f''(t) = -\frac{1}{(t+1)^2} \geqslant -1.$$

On applique la partie minoration de l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre 0 et $x > 0$ :

$$-\frac{x^2}{2} \leqslant f(x) - f(0) - f'(0)x = \ln(1+x) - \ln(1) - 1x.$$

Donc : $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x)$.

**Exemple 3.** En utilisant la fonction $f : x \longrightarrow \ln(1+x)$ définie sur $[0, +\infty[$, étudier la suite $(S_n)$ définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

La fonction $f : x \longrightarrow \ln(1+x)$ est de classe $C^\infty$ sur $[0, +\infty[$ et on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 0$,

$$f^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!(-1)^{k-1}}{(x+1)^k}, \text{ donc } \left|f^{(k)}(x)\right| = \frac{(k-1)!}{(x+1)^k} \leqslant (k-1)!.$$

On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $n$ entre 0 et $y > 0$, en majorant $\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ par $n!$ :

$$\left|\ln(1+y) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} y^k}{k}\right| \leqslant n! \frac{y^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{y^{n+1}}{(n+1)}.$$

On trouve en particulier que pour $y = 1$ : $|\ln(2) - S_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)}$. Or $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0$. Donc par encadrement $(S_n)$ converge vers $\ln(2)$.