Déterminants

Cours de É. Bouchet – PCSI

5 mai 2022

Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n désignera un entier de $\mathbb{N}^*$.

1 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

1.1 Définition

Définition (Forme alternée)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et soit f une application de E^n dans $\mathbb{K}$. On dit que f est **alternée** si f est nulle sur toute famille de vecteurs dont au moins deux sont égaux.

Exemple 1. L'application de E^2 dans $\mathbb{K}$ définie par $f(x, y) = x - y$ est alternée.

Définition (Déterminant dans une base)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et soit B une base de E. Il existe une unique application $\det_B$ définie de E^n dans $\mathbb{K}$ qui vérifie :
- $\det_B$ est linéaire par rapport à chaque variable,
- $\det_B$ est alternée,
- $\det_B(B) = 1$.

On l'appelle **déterminant dans la base** B.

Démonstration. Les preuve d'existence et d'unicité sont hors-programme. □

Proposition (Antisymétrie du déterminant)**.**

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Alors :

$$\det_B(x_1, \ldots, \underbrace{x_j}_{\text{position } i}, \ldots, \underbrace{x_i}_{\text{position } j}, \ldots, x_n) = -\det_B(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n).$$

Remarque. Autrement dit, intervertir deux vecteurs inverse le signe du déterminant.

Démonstration. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i < j$. Comme $\det_B$ est d'une part alternée, d'autre part linéaire en les deux variables, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \det_B(x_1, \ldots, \underbrace{x_i + x_j}_{\text{position } i}, \ldots, \underbrace{x_i + x_j}_{\text{position } j}, \ldots, x_n) \\ &= \det_B(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_n) + \det_B(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_n) \\ 0 &= 0 + \det_B(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) + \det_B(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + 0. \end{aligned}$$

On en déduit bien $\det_B(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = -\det_B(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$. □

Remarque. Le résultat d'antisymétrie est énoncé pour $\det_B$, mais la démonstration montre qu'il reste vrai pour toute application de E^n dans $\mathbb{K}$ linéaire selon chaque variable et alternée.

1.2 Cas particulier des dimensions 2 et 3

Proposition (Déterminant en dimension 2).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et B une de ses bases. Soit $(x,y) \in E^2$ de coordonnées respectives (x_1,x_2) et (y_1,y_2) dans la base B. Alors :

$$\det_B(x,y) = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Remarque. En prévision de la suite, on notera $\det_B(x,y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$.

Démonstration. On note e_1 et e_2 les vecteurs de la base B. Les propriétés du déterminant (on utilise successivement les deux linéarités, le caractère alterné, l'antisymétrie et la valeur en B) donnent alors :

$$\begin{aligned}
\det_B(x,y) &= \det_B(x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2) \\
&= x_1 \det_B(e_1, y_1e_1 + y_2e_2) + x_2 \det_B(e_2, y_1e_1 + y_2e_2) \\
&= x_1y_1 \det_B(e_1,e_1) + x_1y_2 \det_B(e_1,e_2) + x_2y_1 \det_B(e_2,e_1) + x_2y_2 \det_B(e_2,e_2) \\
&= x_1y_2 \det_B(e_1,e_2) - x_2y_1 \det_B(e_1,e_2) \\
\det_B(x,y) &= x_1y_2 - x_2y_1.
\end{aligned}$$

□

Remarque. On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique. Soit $(u,v) \in (\mathbb{R}^2)^2$. Alors $|\det_B(u,v)|$ est l'aire du parallélogramme défini par les vecteurs u et v.
En effet, l'application qui à deux vecteurs associe l'aire algébrique qu'ils délimitent est linéaire par rapport à chaque variable, alternée, et vaut 1 sur la base canonique.
On rappelle que l'aire d'un parallélogramme se calcule dans le cas général par la formule : base $\times$ hauteur.

Proposition (Déterminant en dimensions 3).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et B une de ses bases. Soit $(x,y,z) \in E^3$ de coordonnées respectives (x_1,x_2,x_3), (y_1,y_2,y_3) et (z_1,z_2,z_3) dans la base B. Alors :

$$\det_B(x,y,z) = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2.$$

Remarque. En prévision de la suite, on notera $\det_B(x,y,z) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

(Faire le dessin de la règle de Sarrus)

Démonstration. On note e_1, e_2 et e_3 les vecteurs de la base B. Les propriétés du déterminant (on utilise successivement les deux linéarités, le caractère alterné, l'antisymétrie et la valeur en B) donnent alors :

$$\begin{aligned}
\det_B(x,y,z) &= x_1 \det_B(e_1,y,z) + x_2 \det_B(e_2,y,z) + x_3 \det_B(e_3,y,z) \\
&= 0 + x_1y_2 \det_B(e_1,e_2,z) + x_1y_3 \det_B(e_1,e_3,z) \\
&\quad + x_2y_1 \det_B(e_2,e_1,z) + 0 + x_2y_3 \det_B(e_2,e_3,z) \\
&\quad + x_3y_1 \det_B(e_3,e_1,z) + x_3y_2 \det_B(e_3,e_2,z) + 0 \\
&= 0 + 0 + x_1y_2z_3 \det_B(e_1,e_2,e_3) + 0 + x_1y_3z_2 \det_B(e_1,e_3,e_2) + 0 \\
&\quad + 0 + 0 + x_2y_1z_3 \det_B(e_2,e_1,e_3) + x_2y_3z_1 \det_B(e_2,e_3,e_1) + 0 + 0 \\
&\quad + 0 + x_3y_1z_2 \det_B(e_3,e_1,e_2) + 0 + x_3y_2z_1 \det_B(e_3,e_2,e_1) + 0 + 0
\end{aligned}$$

$$\det_B(x,y,z) = x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 + x_2y_3z_1 - x_2y_1z_3 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1.$$

En effet, $\det_B(e_1,e_2,e_3) = 1$, $\det_B(e_1,e_3,e_2) = -\det_B(e_1,e_2,e_3) = -1$, $\det_B(e_2,e_1,e_3) = -\det_B(e_1,e_2,e_3) = -1$, $\det_B(e_2,e_3,e_1) = -\det_B(e_2,e_1,e_3) = +\det_B(e_1,e_2,e_3) = 1$, $\det_B(e_3,e_2,e_1) = -\det_B(e_1,e_2,e_3) = -1$ et $\det_B(e_3,e_1,e_2) = -\det_B(e_1,e_3,e_2) = +\det_B(e_1,e_2,e_3) = 1$. $\square$

Remarque. On se place dans le plan $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique. Soit $(u,v,w) \in (\mathbb{R}^3)^3$. Alors $|\det_B(u,v,w)|$ est le volume du parallélépipède défini par les vecteurs u, v et w.
En effet, l'application qui à trois vecteurs associe le volume algébrique qu'ils délimitent est linéaire par rapport à chaque variable, alternée, et vaut 1 sur la base canonique.

1.3 Propriétés

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit B une base de E. Soit f une application de E^n dans $\mathbb{K}$, linéaire par rapport à chaque variable et alternée. Alors f est un multiple de $\det_B$.

Démonstration. Montrons que $f = f(B)\det_B$.
- Si $f(B) \neq 0$, alors $X \to \frac{f(X)}{f(B)}$ est une application de E^n dans $\mathbb{K}$, linéaire par rapport à chaque variable, alternée et qui vaut 1 en B. C'est donc $\det_B$.
- Si $f(B) = 0$, on pose $(x_1,\ldots,x_n) \in E^n$. En décomposant les x_i sur la base B et en utilisant la linéarité de f selon chaque variable, on peut écrire $f(x_1,\ldots,x_n)$ comme combinaison linéaire de $f(B)$. Donc $f(x_1,\ldots,x_n) = 0$. Ceci étant vrai pour tout n-uplet, f est l'application nulle.

Donc $f = f(B)\det_B$, ce qui montre le résultat annoncé. $\square$

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit B et B' deux bases de E. Alors :

$$\forall X = (x_1,\ldots,x_n) \in E^n, \quad \det_{B'}(X) = \det_{B'}(B) \times \det_B(X).$$

Démonstration. $\det_{B'}$ est une application de E^n dans $\mathbb{K}$, linéaire par rapport à chaque variable et alternée. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\forall X \in E^n$, $\det_{B'}(X) = \lambda \det_B(X)$. En particulier, $X = B$ donne $\det_{B'}(B) = \lambda \det_B(B) = \lambda$, d'où le résultat. $\square$

Proposition.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, soit B une base de E et soit $X \in E^n$ une famille de n vecteurs de E. Alors :

$$X \text{ est une base de } E \iff \det_B(X) \neq 0.$$

Démonstration.
- On suppose que X est une base de E. Alors $1 = \det_X(X) = \det_X(B)\det_B(X)$, donc $\det_B(X) \neq 0$.
- Pour la réciproque, on raisonne par contraposition : on suppose que $X = (x_1,\ldots,x_n)$ n'est pas une base de E. Donc X est une famille liée (c'est une famille à n éléments en dimension n). Quitte à renuméroter et permuter les vecteurs (ce qui change seulement le signe du déterminant), on en déduit que x_n s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs. Donc il existe $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$ tels que $x_n = \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k x_k$. Par propriétés du déterminant, on trouve alors :

$$\det_B(X) = \det_B\left(x_1,\ldots,x_{n-1},\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k \det_B(x_1,\ldots,x_{n-1},x_k) = \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k 0 = 0.$$

Donc X est une base de E si et seulement si $\det_B(X) \neq 0$. $\square$

Exemple 2. La famille $((1,2,0),(1,0,1),(1,1,4))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
On utilise la formule du déterminant en dimension 3, dans la base canonique (la suite du chapitre donnera des méthodes plus efficaces pour le calcul, qu'on privilégiera quand on les aura vues) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 0 - 0 - 1 - 8 = -7 \neq 0.$$

Donc la famille est une base de $\mathbb{R}^3$.

2 Déterminant d'un endomorphisme

Définition (Déterminant d'un endomorphisme)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, B une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. La valeur $\det_B(f(B))$ ne dépend pas de la base B choisie. On l'appelle **déterminant de** f et on la note $\det(f)$.

Démonstration. Soit B et B' deux bases de E, montrons que $\det_B(f(B)) = \det_{B'}(f(B'))$.
Comme f est une application linéaire, l'application qui à $X \in E^n$ associe $\det_B(f(X))$ est linéaire par rapport à chaque variable et alternée, donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\forall X \in E^n$, $\det_B(f(X)) = \lambda \det_B(X)$. En particulier, pour $X = B$, on trouve $\det_B(f(B)) = \lambda \det_B(B) = \lambda$. Donc :

$$\forall X \in E^n, \quad \det_B(f(X)) = \det_B(f(B)) \det_B(X).$$

Mais on sait également que $\det_B(X) = \det_B(B') \det_{B'}(X)$. Le cas particulier $X = B'$ donne donc :

$$\det_B(f(B')) = \det_B(f(B)) \det_B(B') \det_{B'}(B') = \det_B(f(B)) \det_B(B'). \qquad (*)$$

Par ailleurs, $\det_B = \det_B(B') \det_{B'}$ donne également, appliqué en $f(B')$,

$$\det_B(f(B')) = \det_B(B') \det_{B'}(f(B')). \qquad (**)$$

Les deux relations $(*)$ et $(**)$ mises bout à bout donnent : $\det_B(f(B)) \det_B(B') = \det_B(B') \det_{B'}(f(B'))$, ce qui, en divisant par $\det_B(B') \neq 0$ montre bien $\det_B(f(B)) = \det_{B'}(f(B'))$. $\square$

Remarque. Le déterminant n'existe que pour un endomorphisme (pas pour n'importe quelle application linéaire).

Exemple 3. En notant B une base de E, on trouve $\det(\mathrm{id}_E) = \det_B(\mathrm{id}_E(B)) = \det_B(B) = 1$.

Proposition (Déterminant d'une composée)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Alors :

$$\det(f \circ g) = \det(f) \det(g).$$

Démonstration. Soit B une base de E. Alors $\det(f \circ g) = \det_B(f \circ g(B)) = \det_B(f(g(B)))$. On montre comme dans la preuve précédente que $\forall X \in E^n, \quad \det_B(f(X)) = \det_B(f(B)) \det_B(X)$, donc :

$$\det(f \circ g) = \det_B(f(g(B))) = \det_B(f(B)) \det_B(g(B)) = \det(f) \det(g).$$

$\square$

Proposition (Caractérisation des automorphismes).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est un automorphisme de E si et seulement si $\det(f) \neq 0$. Dans ce cas, on a aussi $\det\left(f^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(f)}$.

Démonstration. On note B une base de E.
- On suppose que $\det(f) \neq 0$. Donc $\det_B(f(B)) \neq 0$, ce qui signifie que $f(B)$ est une base de E. Donc l'image par f d'une base de E est toujours une base, ce qui implique (par propriété des applications linéaires) que f est un automorphisme de E.
- On suppose que f est un automorphisme de E, alors $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_E$, donc :

$$\det(f)\det(f^{-1}) = \det(f \circ f^{-1}) = \det(\mathrm{id}_E) = 1.$$

Donc $\det(f) \neq 0$ et $\det\left(f^{-1}\right) = \frac{1}{\det(f)}$.

□

3 Déterminant d'une matrice carrée

Définition (Déterminant d'une matrice carrée).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A le déterminant de la famille des colonnes de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, que l'on note

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Remarque. Attention, le déterminant n'est défini que pour des matrices **carrées**.

Exemple 4. Soit B_n la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Alors $\det(I_n) = \det_{B_n}(B_n) = 1$.

Remarque. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, soit B une base de E et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. La définition du déterminant d'un endomorphisme donne alors directement $\det(f) = \det(\mathrm{Mat}_B(f))$.

Proposition (Caractère n-linéaire alterné).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $A \mapsto \det(A)$ est n-linéaire et alternée par rapport aux colonnes de A.
En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Démonstration. On note B_n la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Les propriétés de l'application étudiée découlent directement de celles de $\det_{B_n}$. De plus, soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Si on note $C_1,\ldots,C_n$ les colonnes de A,

$$\det(\lambda A) = \det_{B_n}(\lambda C_1, \ldots, \lambda C_n) = \lambda^n \det_{B_n}(C_1, \ldots, C_n) = \lambda^n \det(A).$$

□

Remarque. Attention, cela ne signifie pas que le déterminant est linéaire : dans le cas général, si $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\det(\lambda A + B) \neq \lambda \det(A) + \det(B).$$

Proposition (Déterminant d'un produit).

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Démonstration. Soit f_A et f_B les endomorphismes canoniquement associés à A et B. Alors, par propriétés du déterminant et des matrices d'endomorphismes,

$$\det(A)\det(B) = \det(f_A)\det(f_B) = \det(f_A \circ f_B) = \det(AB).$$

□

Proposition (Caractérisation de l'inversibilité).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans le cas inversible, on a de plus $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Démonstration. Soit f_A l'endomorphisme canoniquement associé à A. Alors :

$$A \text{ est inversible } \iff f_A \text{ est bijectif } \iff \det(f_A) \neq 0 \iff \det(A) \neq 0.$$

Et dans le cas inversible, $\det(A^{-1}) = \det(f_A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f_A)} = \dfrac{1}{\det(A)}$.

□

Remarque. On déduit de tout cela que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont le même déterminant. En effet, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $\det\left(P^{-1}AP\right) = \det(P)^{-1}\det(A)\det(P) = \det(A)$.

Proposition (Invariance par transposition).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A^\top) = \det(A)$.

Démonstration. Hors programme. □

4 Calcul des déterminants

4.1 Pivot de Gauss

Proposition (Effet des opérations élémentaires sur le déterminant).

Soient $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :
- Les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ et $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ ne modifient pas le déterminant.
- Les opérations élémentaires $L_i \leftarrow \lambda L_i$ et $C_i \leftarrow \lambda C_i$ multiplient le déterminant par λ.
- Les opérations élémentaires $L_i \leftrightarrow L_j$ et $C_i \leftrightarrow C_j$ multiplient le déterminant par -1.

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat sur les colonnes puisque le déterminant est invariant par transposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $C_1, \ldots, C_n$ ses colonnes et B_n la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
- Le déterminant est linéaire par rapport à la i-ème colonne et alterné, donc :

$$\det_{B_n}(C_1, \ldots, C_i + \lambda C_j, \ldots, C_n) = \det_{B_n}(C_1, \ldots, C_n) + \lambda \det_{B_n}(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_n) = \det(A) + \lambda \times 0 = \det(A).$$

— Le déterminant est linéaire par rapport à la i-ème variable, donc :

$$\det_{B_n}(C_1,\ldots,\lambda C_i,\ldots,C_n) = \lambda \det_{B_n}(C_1,\ldots,C_n) = \lambda \det(A).$$

— Pour ce dernier point, on écrit le calcul dans le cas $i<j$ ($i>j$ se traite de même). Le déterminant est alterné, donc :

$$\det_{B_n}(C_1,\ldots,\underbrace{C_j}_{\text{position } i},\ldots,\underbrace{C_i}_{\text{position } j},\ldots,C_n) = -\det_{B_n}(C_1,\ldots,C_n) = -\det(A).$$

□

Remarque. Pour calculer le déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on effectue donc des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes de la matrice, jusqu'à se ramener au déterminant d'une matrice triangulaire.

Proposition (Déterminant d'une matrice triangulaire)**.**

Soit $T=(t_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice triangulaire. Alors :

$$\det(T) = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}.$$

Démonstration. Traitons le cas où T est triangulaire supérieure (la preuve s'adapte ensuite facilement au cas triangulaire inférieur). En utilisant successivement la linéarité du déterminant sur la première colonne et les opérations élémentaires $C_i \longleftarrow C_i - t_{1i}C_1$, on trouve :

$$\det(T) = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & t_{nn} \end{vmatrix} = t_{11} \begin{vmatrix} 1 & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & t_{nn} \end{vmatrix} = t_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & t_{nn} \end{vmatrix}.$$

En répétant successivement cette stratégie pour chaque valeur diagonale, on obtient :

$$\det(T) = \prod_{i=1}^{n} t_{ii} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}.$$

□

Remarque. On retrouve ainsi un résultat déjà connu : une matrice triangulaire est inversible si et seulement si elle n'a aucun terme diagonal nul.

Exemple 5. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Les opérations $\begin{cases} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$ puis $L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2$ donnent :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Les opérations $\begin{cases} L_2 \longleftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$ puis $L_2 \longleftarrow -\frac{1}{8}L_2$ et $L_3 \longleftarrow L_3 + 4L_2$ donnent :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -8 \\ 0 & -4 & -8 \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -8 \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (-8) \times 1 \times 1 \times (-4) = 32.$$

4.2 Développement par ligne ou par colonne

Proposition (Développement par rapport à une ligne ou une colonne).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ on pose $\Delta_{ij}(A)$ la matrice obtenue à partir de A en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne. Alors :

— Soit $i \in [\![1,n]\!]$, développer par rapport à la i-ème ligne donne :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\Delta_{ij}(A)).$$

— Soit $j \in [\![1,n]\!]$, développer par rapport à la j-ème colonne donne :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\Delta_{ij}(A)).$$

Démonstration. Non exigible, on se contente donc de deux cas particuliers pour esquisser le raisonnement. Développer selon la première colonne donne :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} 1 & a_{22} \\ 0 & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{12} \end{vmatrix}.$$

Comme le déterminant est invariant par transposée, on a aussi de la linéarité suivant chaque ligne. Développer selon la seconde ligne donne alors :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{21} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= -a_{21} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= -a_{21} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= -a_{21} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{13} \\ 0 & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Exemple 6. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$.

Développer suivant la première colonne donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = (45-48) - 2(36-42) + 3(32-35) = -3 + 12 - 9 = 0.$$

Remarque. Le développement par rapport à une ligne ou colonne est surtout utile quand une ligne ou colonne contient beaucoup de zéros. Quand ce n'est pas le cas, le pivot de Gauss permet souvent d'aboutir en moins de calculs.

Exemple 7. Retour sur l'exemple 2 : retrouver la valeur de $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ par une autre méthode.

Un développement suivant la première colonne (puisqu'elle contient un 0) donne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1 - 2(4-1) = -7.$$