

Ensemble des nombres complexes

Cours de É. Bouchet – PCSI

19 octobre 2022

Table des matières

1	Nombres complexes	2
1.1	Présentation	2
1.2	Représentation graphique	2
1.3	Écriture algébrique	3
2	Conjugaison et module	3
2.1	Conjugaison	3
2.2	Module	4
2.3	Interprétation géométrique du module	5
3	Nombres complexes de module 1 et trigonométrie	6
3.1	Nombres complexes de module 1	6
3.2	Formules d’Euler et technique de l’angle moitié	7
3.3	Formule de Moivre	8
4	Forme trigonométrique	9
4.1	Forme trigonométrique et arguments	9
4.2	Transformation de $a \cos(t) + b \sin(t)$	10

1 Nombres complexes

1.1 Présentation

Définition 1.1 (Nombre complexe)

On appelle **nombre complexe** tout élément z pouvant s'écrire sous la forme $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et i une solution de l'équation $i^2 = -1$.

Remarque. L'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes est muni de deux opérations internes, l'addition et la multiplication, dont les règles de calculs sont identiques à celles de \mathbb{R} , en tenant compte de l'égalité $i^2 = -1$. Les formules usuelles sur les sommes (somme de termes d'une suite géométrique, télescopage, binôme de Newton, identités remarquables...) restent valides dans \mathbb{C} .

Exercice 1. Simplifier le produit $(1 + 3i)(2 - 5i)$.

Solution : $(1 + 3i)(2 - 5i) = 2 + 6i - 5i - 15i^2 = 2 + 15 + i(6 - 5) = 17 + i$.

Remarque. Si $z = a + ib$ avec (a, b) un couple de réels différent de $(0, 0)$, alors $z \neq 0$ et on a :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 - i^2b^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Exercice 2. Simplifier le quotient $\frac{1}{3i - 2}$.

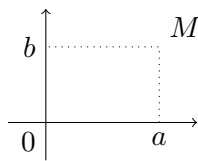
Solution : $\frac{1}{2 - 3i} = \frac{-2 - 3i}{(-2 + 3i)(-2 - 3i)} = \frac{-2 - 3i}{4 + 9} = -\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$.

1.2 Représentation graphique

Définition 1.2 (Affixe)

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) , aussi appelé **plan complexe**.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et M le point du plan de coordonnées (a, b) . Le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé **l'affixe** du point M . C'est aussi l'affixe du vecteur \overrightarrow{OM} .



Proposition 1.3 (Affixe d'un vecteur quelconque)

Soit A et B deux points du plan complexe d'affixes z_A et z_B . Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour affixe $z_B - z_A$.

Démonstration. Découle directement de la relation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. □

Proposition 1.4 (Affixe du milieu d'un segment)

Soit A et B deux points du plan complexe d'affixes z_A et z_B . Le milieu du segment $[AB]$ a pour affixe $\frac{z_A + z_B}{2}$.

Démonstration. On note C le milieu du segment et z_C son affixe. Alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, donc $z_C - z_A = z_B - z_C$, donc $2z_C = z_A + z_B$ et $z_C = \frac{z_A + z_B}{2}$. □

1.3 Écriture algébrique

Définition 1.5 (Partie réelle, partie imaginaire)

L'écriture du nombre complexe z sous la forme $z = a + ib$ avec a et b des réels est appelée **l'écriture algébrique** de z . Le réel a est appelé la **partie réelle** de z et b est sa **partie imaginaire**.
On note $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$.

Remarque. Attention : contrairement à ce que son nom pourrait laisser penser, la partie imaginaire est un réel.

Proposition 1.6 (Unicité de l'écriture algébrique)

L'écriture algébrique d'un nombre complexe z est unique.

Démonstration. On suppose que $z = a + ib = \alpha + i\beta$ avec $(a, b, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4$. Alors $(a - \alpha) = -i(b - \beta)$, et donc

- Si $b = \beta$, alors $a = \alpha$ et les deux écritures sont identiques.
- Si $b \neq \beta$, alors

$$i = -\frac{a - \alpha}{b - \beta} \in \mathbb{R},$$

ce qui est impossible.

D'où l'unicité.

Variante : en mettant au carré l'égalité $(a - \alpha) = -i(b - \beta)$, on trouve $(a - \alpha)^2 = -(b - \beta)^2$ et les deux carrés sont donc nuls. Donc $a = \alpha$ et $b = \beta$. \square

Proposition 1.7 (Écriture algébrique de la somme et du produit)

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Alors :

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(z_1 + z_2) &= \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2), & \operatorname{Im}(z_1 + z_2) &= \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2), \\ \operatorname{Re}(z_1 z_2) &= \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Im}(z_2), & \operatorname{Im}(z_1 z_2) &= \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Im}(z_2) + \operatorname{Re}(z_2) \operatorname{Im}(z_1).\end{aligned}$$

Démonstration. On pose $a_1 = \operatorname{Re}(z_1)$, $a_2 = \operatorname{Re}(z_2)$, $b_1 = \operatorname{Im}(z_1)$ et $b_2 = \operatorname{Im}(z_2)$. On a alors $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$. Les opérations de calcul sur les nombres complexes donnent directement :

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2) \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(b_1 a_2 + b_2 a_1).$$

\square

Définition 1.8 (Nombre imaginaire pur)

Le complexe z est dit **imaginaire pur** si $\operatorname{Re}(z) = 0$. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres imaginaires purs.

Exemple 3. $3i$ est un imaginaire pur, $2 + 3i$ n'en est pas un.

2 Conjugaison et module

2.1 Conjugaison

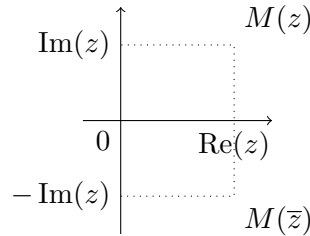
Définition 2.1 (Conjugué)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Le **conjugué** du nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$.

Remarque. On a donc $\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$.

Proposition 2.2 (Image du conjugué dans le plan)

Dans le plan complexe, l'image $M(\bar{z})$ du nombre complexe \bar{z} est le symétrique par rapport à l'axe des abscisses du point $M(z)$.



Proposition 2.3 (Lien entre conjugué et partie réelle/imaginaire)

Pour tout complexe z ,

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Démonstration. On pose $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors $z + \bar{z} = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2ib = 2i\operatorname{Im}(z)$. □

Remarque. En particulier, $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$ et $z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z$.

Proposition 2.4 (Opérations sur le conjugué)

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ et $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$. Si de plus z_2 est non nul, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Démonstration. On pose $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$, avec $(a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{R}^4$. Alors :

$$\overline{z_1 + z_2} = a_1 + a_2 - i(b_1 + b_2) = a_1 - ib_1 + a_2 - ib_2 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)} = a_1 a_2 - b_1 b_2 - i(a_1 b_2 + a_2 b_1) = (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

On obtient la dernière égalité par produit avec $\overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \frac{a_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{b_2}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{1}{\bar{z}_2}$. □

2.2 Module

Définition 2.5 (Module)

Soit $z = a + ib$ où (a, b) est un couple de réels. Le **module** de z , noté $|z|$, est le réel

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Proposition 2.6 (Propriétés du module)

Pour tout nombre complexe z ,

$$|z| = |\bar{z}|, \quad |z| \geq 0 \quad \text{et} \quad |z| = 0 \iff z = 0.$$

Démonstration. Découle directement de la définition du module. □

Proposition 2.7 (Relations entre $|\operatorname{Re}(z)|$, $|\operatorname{Im}(z)|$ et $|z|$)

Pour tout nombre complexe z ,

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(z)| &\leq |z| & \text{et} & & \operatorname{Re}(z) = |z| &\iff z \in \mathbb{R}_+, \\ |\operatorname{Im}(z)| &\leq |z| & \text{et} & & \operatorname{Im}(z) = |z| &\iff z \in i\mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Démonstration. On montre la première relation, la deuxième s'obtient de la même manière. Soit $z \in \mathbb{C}$, par stricte croissance de la fonction racine sur \mathbb{R}_+ , on a :

$$|\operatorname{Re}(z)| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2} \leq \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = |z|,$$

de plus,

$$\operatorname{Re}(z) = |z| \iff (\operatorname{Re}(z) \geq 0 \text{ et } \operatorname{Re}(z)^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2) \iff (\operatorname{Re}(z) \geq 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z) = 0) \iff z \in \mathbb{R}_+.$$

□

Proposition 2.8 (Module du produit)

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes quelconques. Alors $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

Démonstration. Comme $z_1 \bar{z}_1 = |z_1|^2 \geq 0$, on peut écrire $|z_1 z_2| = \sqrt{z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2} = \sqrt{z_1 \bar{z}_1} \sqrt{z_2 \bar{z}_2} = |z_1| |z_2|$. □

Proposition 2.9 (Inégalité triangulaire)

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes quelconques. Alors

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

et $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff z_1 \bar{z}_2 \in \mathbb{R}_+$.

Remarque. La condition $z_1 \bar{z}_2 \in \mathbb{R}_+$ signifie que les vecteurs d'affixes z_1 et z_2 sont colinéaires et de même sens.

Démonstration. On procède d'abord comme dans le cas réel :

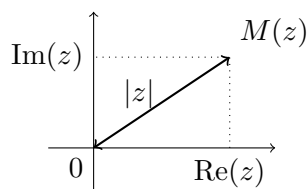
$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 - (|z_1| + |z_2|)^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) - |z_1|^2 - |z_2|^2 - 2|z_1||z_2| \\ &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) - |z_1|^2 - |z_2|^2 - 2|z_1||\bar{z}_2| \\ &= |z_1|^2 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + |z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2 - 2|z_1 \bar{z}_2| \\ &= 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) - 2|z_1 \bar{z}_2| \leq 0. \end{aligned}$$

D'où $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$, et en passant à la racine (croissante sur \mathbb{R}_+), comme les modules sont tous positifs, $|z_1 + z_2| \leq (|z_1| + |z_2|)$. De plus, on a égalité si et seulement si $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = |z_1 \bar{z}_2| \iff z_1 \bar{z}_2 \in \mathbb{R}_+$. □

2.3 Interprétation géométrique du module

Proposition 2.10 (Module et distance à l'origine)

Soit $z \in \mathbb{C}$. Dans le plan complexe, $|z|$ représente la distance de l'origine 0 au point $M(z)$.



Proposition 2.11 (Module et distance entre deux points)

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et A, B leurs images dans le plan complexe. La valeur $|a - b|$ correspond à la distance AB entre ces deux points.

Remarque. On déduit directement de ces propriétés que si A est un point d'affixe a et r est un réel strictement positif,

- Le cercle de centre A et de rayon r est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$.
- Le disque fermé de centre A et de rayon r est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$.
- Le disque ouvert de centre A et de rayon r est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$.

Exercice 4. Montrer que le point d'affixe $2 + i$ se trouve sur le cercle de centre d'affixe $2i$ et de rayon $\sqrt{5}$.

Solution : Il suffit de vérifier que $|2 + i - 2i| = |2 - i| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$.

3 Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

3.1 Nombres complexes de module 1

Définition 3.1 (Cercle trigonométrique)

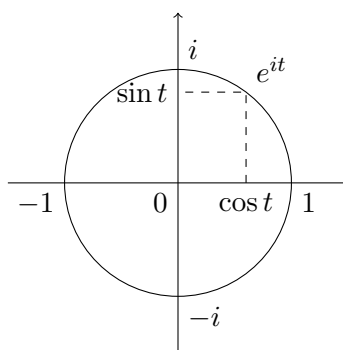
On pose $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Dans le plan complexe, \mathbb{U} s'identifie au cercle trigonométrique, de centre 0 et de rayon 1.

Définition 3.2 ($e^{it}, t \in \mathbb{R}$)

Soit $t \in \mathbb{R}$, on note e^{it} le nombre complexe $\cos(t) + i \sin(t)$.

Remarque. Attention, l'exponentielle est ici une simple notation. Notamment, il ne FAUT PAS appliquer \ln à des exponentielles complexes pour les simplifier.

Remarque. Comme tout point du cercle trigonométrique a des coordonnées du type $(\cos(t), \sin(t))$ avec $t \in \mathbb{R}$, on a donc $\mathbb{U} = \{e^{it} \mid t \in \mathbb{R}\}$.



Proposition 3.3 (Produit de termes en e^{it})

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$.

Démonstration. Il suffit de revenir à la définition :

$$\begin{aligned} e^{ia}e^{ib} &= (\cos(a) + i \sin(a))(\cos(b) + i \sin(b)) \\ &= \cos(a)\cos(b) + i \cos(a)\sin(b) + i \sin(a)\cos(b) + i^2 \sin(a)\sin(b) \\ &= (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)) + i(\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)) \\ &= \cos(a+b) + i \sin(a+b) \\ e^{ia}e^{ib} &= e^{i(a+b)} \end{aligned}$$

□

Proposition 3.4 (Quotient de termes en e^{it})

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{ia}} = e^{-ia} = \frac{1}{e^{ia}}$.

Démonstration. Un calcul et les parités de sinus et cosinus donnent :

$$\overline{e^{ia}} = \overline{\cos(a) + i \sin(a)} = \cos(a) - i \sin(a) = \cos(-a) + i \sin(-a) = e^{-ia}.$$

Par ailleurs,

$$\frac{1}{e^{ia}} = \frac{1}{\cos(a) + i \sin(a)} = \frac{\cos(a) - i \sin(a)}{\cos^2(a) + \sin^2(a)} = \frac{e^{-ia}}{1} = e^{-ia}.$$

□

Remarque. On déduit immédiatement des deux derniers résultats que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{e^{ia}}{e^{ib}} = e^{i(a-b)}$.

Proposition 3.5 (Module de termes en e^{it})

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|e^{it}| = 1$.

Démonstration. Il suffit de faire le calcul : $|e^{it}| = |\cos(t) + i \sin(t)| = \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)} = \sqrt{1} = 1$. □

3.2 Formules d'Euler et technique de l'angle moitié

Proposition 3.6 (Formules d'Euler)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Démonstration. On applique les formules $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ à $z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. □

Remarque. Ces formules permettent d'utiliser des technique de l'angle moitié pour factoriser des expressions : soit $(t, \theta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} e^{it} + e^{i\theta} &= e^{i\frac{t+\theta}{2}} \left(e^{i\frac{t-\theta}{2}} + e^{-i\frac{t-\theta}{2}} \right) = 2 \cos \left(\frac{t-\theta}{2} \right) e^{i\frac{t+\theta}{2}}. \\ e^{it} - e^{i\theta} &= e^{i\frac{t+\theta}{2}} \left(e^{i\frac{t-\theta}{2}} - e^{-i\frac{t-\theta}{2}} \right) = 2i \sin \left(\frac{t-\theta}{2} \right) e^{i\frac{t+\theta}{2}}. \end{aligned}$$

Le cas particulier $t = 0$ permet entre autres de traiter les formes $1 + e^{i\theta}$ et $1 - e^{i\theta}$. Ces relations permettent entre autres de retrouver des formules trigonométriques, en prenant les parties réelles ou imaginaires.

Exercice 5. Soit $(t, \theta) \in \mathbb{R}^2$. En appliquant les techniques d'angle moitié à $e^{it} + e^{i\theta}$, factoriser $\cos(t) + \cos(\theta)$.

Solution : $\cos(t) + \cos(\theta) = \operatorname{Re}(e^{it} + e^{i\theta}) = 2 \cos\left(\frac{t-\theta}{2}\right) \operatorname{Re}\left(e^{i\frac{t+\theta}{2}}\right) = 2 \cos\left(\frac{t-\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{t+\theta}{2}\right)$.

Exercice 6. Soit $(t, \theta) \in \mathbb{R}^2$. En appliquant les techniques d'angle moitié à un nombre complexe à déterminer, factoriser $\sin(t) - \sin(\theta)$.

Solution :

$$\begin{aligned} \sin(t) - \sin(\theta) &= \operatorname{Im}(e^{it} - e^{i\theta}) \\ &= 2 \sin\left(\frac{t-\theta}{2}\right) \operatorname{Im}\left(ie^{i\frac{t+\theta}{2}}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{t-\theta}{2}\right) \operatorname{Im}\left(-\sin\left(\frac{t+\theta}{2}\right) + i \cos\left(\frac{t+\theta}{2}\right)\right) \\ \sin(t) - \sin(\theta) &= 2 \sin\left(\frac{t-\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{t+\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

Exercice 7. Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. **Linéariser** $\cos^3(\theta)$ (c'est-à-dire modifier cette expression pour faire disparaître le produit et se ramener à une combinaison linéaire de fonctions trigonométriques).

Solution : On applique successivement les formules d'Euler, le binôme de Newton, et de nouveau les formules d'Euler :

$$\begin{aligned} \cos^3(\theta) &= \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3}{8} \\ &= \frac{1}{8} (e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}}{2} + 3 \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right) \\ \cos^3(\theta) &= \frac{\cos(3\theta) + 3\cos(\theta)}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $S = \sum_{k=0}^n \cos(3k)$.

Solution : On remarque que $S = \operatorname{Re}(T)$ avec $T = \sum_{k=0}^n e^{i3k}$. On commence donc par calculer T . Par la formule de somme géométrique (puisque $e^{i3} \neq 1$) puis en appliquant la formule de l'angle moitié, on trouve :

$$T = \sum_{k=0}^n (e^{3i})^k = \frac{1 - e^{3i(n+1)}}{1 - e^{3i}} = \frac{e^{\frac{3i(n+1)}{2}} (e^{-\frac{3i(n+1)}{2}} - e^{\frac{3i(n+1)}{2}})}{e^{\frac{3i}{2}} (e^{-\frac{3i}{2}} - e^{\frac{3i}{2}})} = \frac{e^{\frac{3i(n+1)}{2}} (-2i \sin(\frac{3(n+1)}{2}))}{e^{\frac{3i}{2}} (-2i \sin(\frac{3}{2}))} = \frac{\sin(\frac{3(n+1)}{2})}{\sin(\frac{3}{2})} e^{\frac{3in}{2}}.$$

D'où par passage à la partie réelle, $S = \frac{\sin(\frac{3(n+1)}{2})}{\sin(\frac{3}{2})} \cos(\frac{3n}{2})$.

3.3 Formule de Moivre

Proposition 3.7 (Formule de Moivre)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Démonstration. Il suffit de passer sous forme exponentielle : $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$. \square

Exercice 9. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Solution : La formule de Moivre donne :

$$\cos(3\theta) + i \sin(3\theta) = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^3 = \cos^3(\theta) + 3i \cos^2(\theta) \sin(\theta) - 3 \cos(\theta) \sin^2(\theta) - i \sin^3(\theta).$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on trouve :

$$\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta) \sin^2(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(3\theta) = 3 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \sin^3(\theta).$$

4 Forme trigonométrique

4.1 Forme trigonométrique et arguments

Définition 4.1 (Argument)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Tout réel θ tel que $z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta) = |z| e^{i\theta}$ est appelé un **argument** de z .

Remarque. Si θ est un argument de z , alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\theta + 2k\pi$ est encore un argument de z . De plus, si θ et θ' sont deux arguments de z , alors $\theta \equiv \theta' [2\pi]$.

Remarque. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On suppose que $a + ib = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. Alors :

$$a = r(\cos \theta) \quad \text{et} \quad b = r(\sin \theta),$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exercice 10. Trouver le module et un argument de $z = 1 + i$.

Solution : $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, donc le module de z vaut $\sqrt{2}$.

De plus, $z = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$. Or $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc $\frac{\pi}{4}$ est un argument de z .

Définition 4.2 (Forme trigonométrique)

Tout nombre complexe z non nul s'écrit sous la **forme trigonométrique**

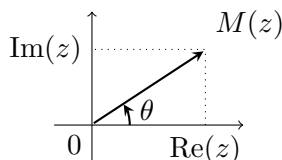
$$z = r e^{i\theta},$$

avec $r > 0$ et θ réel. On a alors $r = |z|$ et θ est un argument de z .

Remarque. Attention, contrairement à la forme algébrique, cette écriture n'est pas unique (puisqu'on peut trouver plusieurs arguments différents).

Proposition 4.3 (Argument et valeurs d'angles)

Soit z un nombre complexe d'affixe M et d'argument θ . Dans le plan complexe, θ correspond à une valeur de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ en radians.



4.2 Transformation de $a \cos(t) + b \sin(t)$

Proposition 4.4 (Transformation de $a \cos(t) + b \sin(t)$)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Alors il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}, a \cos(t) + b \sin(t) = r \cos(t - \varphi)$.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $r = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$.

$$a \cos(t) + b \sin(t) = r \left(\frac{a}{r} \cos(t) + \frac{b}{r} \sin(t) \right).$$

Or $\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{r^2} = 1$. Donc il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{a}{r} = \cos(\varphi)$ et $\frac{b}{r} = \sin(\varphi)$. Donc :

$$a \cos(t) + b \sin(t) = r (\cos(\varphi) \cos(t) + \sin(\varphi) \sin(t)) = r \cos(t - \varphi).$$

□

Exercice 11. Soit $t \in \mathbb{R}$, déterminer une expression de $\cos(t) + \sqrt{3} \sin(t)$ sous la forme $r \cos(t - \varphi)$.

Solution : On calcule $r = \sqrt{1 + 3} = 2$. D'où la factorisation :

$$\cos(t) + \sqrt{3} \sin(t) = 2 \left(\frac{1}{2} \cos(t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(t) \right).$$

On reconnaît maintenant $\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, d'où :

$$\cos(t) + \sqrt{3} \sin(t) = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(t) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin(t) \right) = 2 \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right).$$