Ensembles, applications

Cours de É. Bouchet – ECS1

22 septembre 2020

Table des matières

1 Ensembles

1.1 Appartenance

Définition (Ensemble).

Un **ensemble** E est un groupement d'objets distincts, ces objets s'appellent les **éléments** de l'ensemble.
Si x est un élément de E, on note $x \in E$.
Il existe un ensemble qui n'a pas d'éléments, il est unique, c'est l'**ensemble vide**, noté $\emptyset$.

Deux familles d'ensembles sont à connaître particulièrement :
— Les **ensembles finis** : Ensembles qui ont un nombre d'éléments fini. On appelle **cardinal** ce nombre.
— Les **ensembles dénombrables** : Ensembles non finis dont on peut numéroter les éléments.

Exemple 1. Parmi les ensembles usuels,
— $[\![0, n]\!]$ est l'ensemble des entiers compris entre 0 et n. C'est un ensemble fini de cardinal $(n+1)$.
— $\left\{\frac{k}{n}, k \in [\![1, n]\!]\right\}$ est un ensemble fini de cardinal n.
— $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Q}$ sont des ensembles dénombrables.
— $\mathbb{R}$ n'est ni dénombrable, ni fini, car on ne peut pas numéroter ses éléments.

1.2 Inclusion

Définition (Inclusion, égalité).

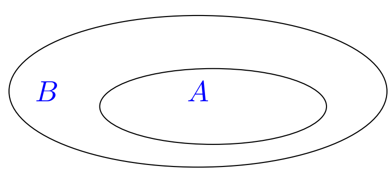
Soient A et B deux ensembles.
— On dit que A est **inclus** dans B si tout élément de A est aussi un élément de B. On note alors

$$A \subset B.$$

— On dit que A et B sont **égaux** si $A \subset B$ et $B \subset A$. On note alors

$$A = B.$$

Exemple 2. Représentation graphique de $A \subset B$:



Remarque. Cela donne en termes de quantificateurs :
— $A \subset B \iff \forall x \in A, x \in B.$
— $A \not\subset B \iff \exists x \in A$ tel que $x \notin B$.

Proposition.

Soit A, B et C trois ensembles.

$$(A \subset B \text{ et } B \subset C) \Longrightarrow (A \subset C).$$

Démonstration. Supposons que $A \subset B$ et $B \subset C$. Soit $x \in A$. Comme $A \subset B$, alors $x \in B$. Et comme $B \subset C$, on a aussi $x \in C$. Donc pour tout $x \in A$, on a aussi $x \in C$. Ce qui implique que $A \subset C$. □

1.3 Ensemble des parties de E

Définition (Ensemble des parties)**.**

Soit E un ensemble. L'ensemble des sous-ensembles (au sens de l'inclusion) de E est appelé **ensemble des parties** de E, et est noté

$$\mathcal{P}(E).$$

Remarque. Attention aux objets manipulés : On écrit $3 \in \mathbb{R}$, $\{3\} \subset \mathbb{R}$ et $\{3\} \in P(\mathbb{R})$.

Exemple 3. Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$.
Les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont : $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$ et $\{1,2,3,4\}$.

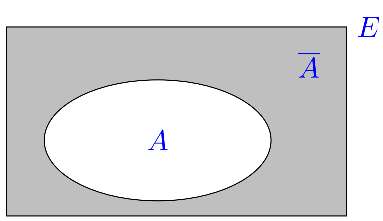
1.4 Complémentaire

Définition (Complémentaire)**.**

Soit E et A deux ensembles, tels que $A \subset E$. On appelle **complémentaire** de A dans E l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A. On note

$$\overline{A} = \{x \in E \text{ tel que } x \notin A\}.$$

Exemple 4. Complémentaire d'un ensemble A dans un ensemble E :



Remarque. En termes de quantificateurs, on a : soit $x \in E$,
- $x \in \overline{A} \iff x \notin A$.
- $x \notin \overline{A} \iff x \in A$.

Remarque. On a également les relations suivantes :
- $\overline{E} = \emptyset$ et $\overline{\emptyset} = E$.
- $\overline{\overline{A}} = A$.
- $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$.

2 Opérations sur les ensembles

2.1 Intersection

Définition (Intersection, ensembles disjoints)**.**

Soit A et B deux ensembles.

— On appelle **intersection** de A et B l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans A et dans B. On la note

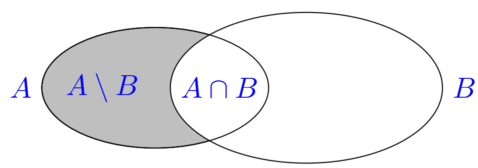
$$A \cap B.$$

— On appelle A **privé de** B, l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B. On le note

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

— On dit que A et B sont **disjoints** lorsque $A \cap B = \emptyset$

Exemple 5. Représentation graphique :



Remarque. On peut généraliser l'intersection à plus de deux ensembles : soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une famille de sous-ensembles de E,

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \in E | \forall i \in [\![1, n]\!], x \in A_i\}$$

et

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \{x \in E | \forall i \in \mathbb{N}^*, x \in A_i\}.$$

Exemple 6. Montrer les égalités suivantes :

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty}]-\infty, -k] = \emptyset.$$

— Il est immédiat que $\emptyset \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty}]-\infty, -k]$.

— Soit $x \in \bigcap_{k=1}^{+\infty}]-\infty, -k]$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $x \in]-\infty, -k]$, c'est-à-dire $x \leqslant -k$. En passant à la limite pour $k \to +\infty$, on trouve $x \leqslant -\infty$: impossible. Donc il n'existe pas de x dans l'ensemble. Donc $\bigcap_{k=1}^{+\infty}]-\infty, -k] \subset \emptyset$.

— Par double inclusion, on obtient bien l'égalité annoncée.

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} \left[1, 1 + \frac{1}{k}\right[= \{1\}.$$

— Soit $x \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} \left[1, 1+\frac{1}{k}\right[$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $x \in \left[1, 1+\frac{1}{k}\right[$, c'est-à-dire $1 \leqslant x \leqslant 1+\frac{1}{k}$. En passant à la limite pour $k \to +\infty$, on trouve $1 \leqslant x \leqslant 1$, et donc $x = 1$. Donc $\bigcap_{k=1}^{+\infty} \left[1, 1+\frac{1}{k}\right[\subset \{1\}$.

— Réciproquement : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $1 \in \left[1, 1+\frac{1}{k}\right[$, donc $1 \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} \left[1, 1+\frac{1}{k}\right[$, et donc $\{1\} \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} \left[1, 1+\frac{1}{k}\right[$.

— Par double inclusion, on obtient donc bien l'égalité annoncée.

Proposition.

Soit A, B et C trois ensembles.

$$A \cap B \subset A \text{ et } A \cap B \subset B,$$

$$\text{Si } A \subset B \text{ alors } A \cap B = A,$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C.$$

Démonstration.

— $\forall x \in A \cap B$, $x \in A$. Donc $A \cap B \subset A$. De même, $A \cap B \subset B$.

— On suppose que $A \subset B$. On sait déjà que $A \cap B \subset A$. Réciproquement, soit $x \in A$. Comme $A \subset B$, alors $x \in B$, donc $x \in A \cap B$, et $A \subset A \cap B$. Par double inclusion, on obtient bien $A \cap B = A$.

— Les ensembles du troisième résultat sont tous égaux à $\{x \text{ tel que } x \in A, x \in B \text{ et } x \in C\}$, et donc égaux.

□

2.2 Réunion

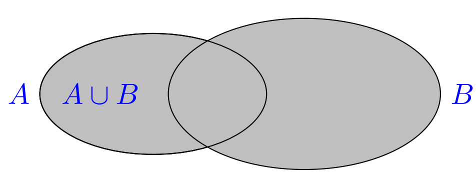
Définition (Réunion)**.**

Soit A et B deux ensembles, on appelle **réunion** de A et B, notée

$$A \cup B,$$

l'ensemble des éléments appartenant soit à A, soit à B.

Exemple 7. Représentation graphique :



Remarque. On peut généraliser la réunion à plus de deux ensembles : soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une famille de sous-ensembles de E,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \in E | \exists i \in [\![1, n]\!], x \in A_i\}$$

et

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \{x \in E | \exists i \in \mathbb{N}^*, x \in A_i\}.$$

Exemple 8. Montrer les égalités suivantes :

$\displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty}]-\infty, k] = \mathbb{R}.$

- Il est immédiat que $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty}]-\infty, k] \subset \mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit N un entier strictement positif supérieur à x (par exemple $N = 1$ si $x \leqslant 0$ et $N = \lfloor x \rfloor + 1$ sinon, où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x qu'on définira rigoureusement dans le prochain chapitre). Alors $x \leqslant N$, donc $x \in]-\infty, N]$ et $x \in \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty}]-\infty, k]$. D'où $\mathbb{R} \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty}]-\infty, k]$.
- Par double inclusion, ces deux ensembles sont bien égaux.

$\displaystyle\bigcup_{k=1}^{10} \left]-\infty, 2 + \frac{1}{k}\right] =]-\infty, 3].$

- Soit $x \in \displaystyle\bigcup_{k=1}^{10} \left]-\infty, 2 + \frac{1}{k}\right]$, alors il existe un $k \in [\![1, 10]\!]$ tel que $x \in \left]-\infty, 2 + \frac{1}{k}\right]$, donc $x \leqslant 2 + \frac{1}{k} \leqslant 3$. Donc $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{10} \left]-\infty, 2 + \frac{1}{k}\right] \subset]-\infty, 3]$.
- Soit $x \in]-\infty, 3]$. Alors $x \in \left]-\infty, 2 + \frac{1}{1}\right]$ donc $x \in \displaystyle\bigcup_{k=1}^{10} \left]-\infty, 2 + \frac{1}{k}\right]$. Donc $]-\infty, 3] \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{10} \left]-\infty, 2 + \frac{1}{k}\right]$.
- Par double inclusion, on obtient donc bien l'égalité annoncée.

Proposition.

Soit A, B et C trois ensembles.

$$A \subset A \cup B \text{ et } B \subset A \cup B,$$

$$\text{Si } A \subset B \text{ alors } A \cup B = B,$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C.$$

Démonstration.

- Soit $x \in A$, alors $x \in A \cup B$, donc $A \subset A \cup B$. De même, $B \subset A \cup B$.
- On suppose que $A \subset B$. On sait déjà que $B \subset A \cup B$. Soit $x \in A \cup B$. Alors $x \in B$ ou $x \in A$. Si $x \in A$, $x \in B$ car $A \subset B$. Donc $x \in B$, et $A \cup B \subset B$.
- Les ensembles du troisième résultat sont tous égaux à $\{x \text{ tel que } x \in A \text{ ou } x \in B \text{ ou } x \in C\}$, et donc égaux.

$\square$

2.3 Propriétés de l'intersection et la réunion

Exemple 9. Montrer que $A \cup B = A \cap B \iff A = B$.

- Si $A = B$, alors $A \cup B = A = A \cap B$. Donc $A = B \Longrightarrow A \cup B = A \cap B$.
- Réciproquement, supposons $A \cup B = A \cap B$.
  - Soit $x \in A$. Alors $x \in A \cup B$ et l'égalité précédente nous donne $x \in A \cap B \subset B$. Donc $x \in B$, et $A \subset B$.
  - On montre de même que $B \subset A$.

  Donc $A = B$ par double inclusion. Donc $A \cup B = A \cap B \Longrightarrow A = B$.

Donc $A \cup B = A \cap B \Longleftrightarrow A = B$.

Proposition (Distributivité)**.**

Soit A, B, C des ensembles.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

et

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,.$$

Démonstration. (démonstration à connaître) On montre la première identité, la deuxième se montre de façon analogue.
- Soit $x \in A \cup (B \cap C)$. Alors $x \in A$ ou $x \in B \cap C$.
  - Si $x \in A$, alors $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
  - Si $x \in B \cap C$, alors $x \in B$ et $x \in C$.

    Donc $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

  Donc $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- Réciproquement, soit $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

  Alors $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$.
  - Si $x \in A$, alors $x \in A \cup (B \cap C)$.
  - Si $x \notin A$, alors $x \in B$ et $x \in C$.

    Donc $x \in B \cap C$ et $x \in A \cup (B \cap C)$.

  Donc $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$.

Par double inclusion, on obtient $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. □

Proposition (Lois de Morgan)**.**

Soit A, B des ensembles.

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

et

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Démonstration. (démonstration à connaître) On montre la première identité, la deuxième se montre de façon analogue.
- Soit $x \in \overline{A \cap B}$. Alors $x \notin A \cap B$.

  Donc $x \notin A$ ou $x \notin B$. Et $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

  Donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
- Réciproquement, soit $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Alors $x \notin A$ ou $x \notin B$.

  Donc $x \notin A \cap B$, et $x \in \overline{A \cap B}$.

  Donc $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

Par double inclusion, on obtient $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. □

3 Produit cartésien

Définition (Produit cartésien)**.**

Soit E et F deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de E par F, noté $E \times F$, l'ensemble des couples ordonnés (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.

Remarque. On a :
— $E \times F = \{(x, y) | x \in E \text{ et } y \in F\}$.
— $u \in E \times F \iff \exists x \in E, \exists y \in F$ tels que $u = (x, y)$.

Exemple 10. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels.

Remarque. On peut généraliser le produit cartésien à plus de deux ensembles : soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-ensembles de E,

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in A_i\}.$$

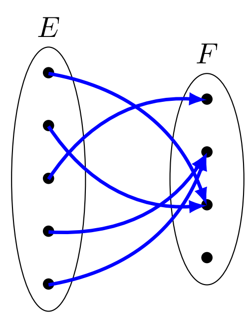
4 Applications

4.1 Définition

Définition (Application, image, antécédent)**.**

Soit E et F deux ensembles non vides. On dit que f est une **application** définie de l'ensemble de départ E dans l'ensemble d'arrivée F lorsqu'elle associe à tout élément x de E un et un seul élément y de F. Cet élément y unique, noté $f(x)$, est **l'image** de x par f. L'élément x est **un antécédent** de y par f.

Exemple 11. Représentation graphique d'une application f :



Exemple 12. $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}, x \longmapsto x^2$ est une application de l'ensemble de départ $\mathbb{R}$ dans l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$. L'image de 2 par f est 4 . Les antécédents de 4 par f sont 2 et -2 .

Remarque. Si I est un sous-ensemble de E, on note parfois $f(I)$ l'ensemble de toutes les images par f des éléments de I :

$$f(I) = \{f(x) | x \in I\}.$$

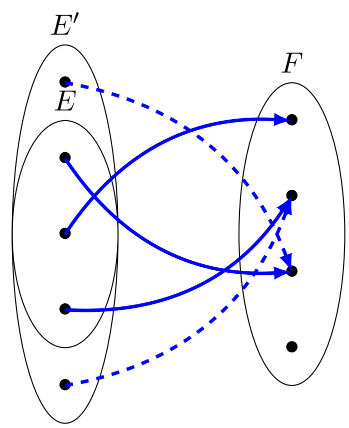
4.2 Restriction et prolongement

Définition (Restriction, prolongement)**.**

Soit E, E' et F des ensembles non vides tels que $E \subset E'$. Soit f une application de E dans F, et g une application de E' dans F.
On dit que f est **la restriction** de g à E, et que g est **un prolongement** de f à E', lorsque :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = g(x).$$

Exemple 13. Représentation graphique des applications f et g :



Exemple 14. Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}, x \longmapsto x^2$, $g : [0, +\infty[\longmapsto \mathbb{R}, x \longmapsto x^2$.
Alors, g est la restriction de f à $[0, +\infty[$. f est un prolongement de g à $\mathbb{R}$.
Un autre prolongement de g à $\mathbb{R}$ est : $h : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ telle que $h(x) = x^2$ si $x \geqslant 0$, $h(x) = 0$ si $x < 0$.

4.3 Composée de deux applications

Définition (Composée)**.**

Soit D_f, A_f, D_g et A_g des ensembles non vides. Soit f une application définie de D_f dans A_f et g une application définie de D_g dans A_g. Si $A_f \subset D_g$, on appelle **composée** de f par g, notée $g \circ f$, l'application définie de D_f dans A_g par :

$$\forall x \in D_f, \quad g \circ f(x) = g\left(f(x)\right).$$

Remarque. Attention, $g \circ f$ peut être défini sans que $f \circ g$ le soit. En effet, les conditions de bonne définition sont différentes : il faut $A_f \subset D_g$ pour définir $g \circ f$ et $A_g \subset D_f$ pour définir $f \circ g$.

Exemple 15. Soit $f : [0, +\infty[\longmapsto \mathbb{R}, x \longmapsto x^2$, $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}, x \longmapsto x^3$.
$\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$, donc $g \circ f$ est bien définie.
On a de plus $g \circ f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g \circ f(x) = (x^2)^3 = x^6$.

4.4 Injection, surjection, bijection

Définition (Injection).

Soit E et F deux ensembles, et f une application définie de E dans F. On dit que f est une **injection** de E dans F lorsque deux éléments de E distincts ont des images distinctes dans F :

$$\forall (x,x') \in E^2, f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x' \text{ (contraposée).}$$

Remarque. Pour montrer qu'une application n'est pas injective, il faut donc montrer :

$$\exists (x,x') \in E^2 \text{ tels que } x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x'),$$

c'est-à-dire qu'on peut trouver deux éléments distincts de E qui ont la même image par f.

Définition (Surjection).

Soit E et F deux ensembles, et f une application définie de E dans F. On dit que f est une **surjection** de E dans F lorsque tout élément de F admet au moins un antécédent dans E :

$$\forall y \in F, \exists x \in E \text{ tel que } f(x) = y.$$

Remarque. La fonction f est une surjection si et seulement si $f(E) = F$.

Remarque. Pour montrer qu'une application n'est pas surjective, il faut donc montrer :

$$\exists y \in F \text{ tel que } \forall x \in E, f(x) \neq y,$$

c'est-à-dire qu'on peut trouver un élément de F qui n'a pas d'antécédent par f.

Définition (Bijection).

Soit E et F deux ensembles, et f une application définie de E dans F. On dit que f est une **bijection** de E sur F lorsque f est une surjection et une injection :

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E \text{ tel que } f(x) = y.$$

Remarque. Les termes application injective, surjective, bijective peuvent également être utilisés à la place d'injection, surjection, bijection.

Exemple 16. Soit $f : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \mapsto \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{array}$. f est :

— Une injection de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. En effet, soit $(x,y) \in [0,+\infty[^2$, on suppose que $f(x) = f(y)$. Alors $x^2 = y^2$, donc par passage à la racine $|x| = |y|$ et par positivité de x et y, $x = y$.

— Une surjection de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty[$. En effet, si $y \in [0, +\infty[$, $\sqrt{y}$ est bien défini. On a alors $f(\sqrt{y}) = y$, et donc $\sqrt{y}$ est un antécédent de y.
— Une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$.

Exemple 17. On considère l'application $g : \begin{array}{ll} \mathbb{Z} & \mapsto \mathbb{Z} \\ n & \mapsto 2n+2 \end{array}$. Est-elle injective, surjective, bijective ?

— Soit $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$. Supposons que $g(n_1) = g(n_2)$. Alors $2n_1+2 = 2n_2+2$, et donc $n_1 = n_2$. Donc g est injective.
— Montrons que g n'atteint pas les termes impairs, et 1 en particulier. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $g(n) = 1$. Alors $2n + 2 = 1$, donc $n = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$: absurde. Donc 1 n'a pas d'antécédent par g. Donc g n'est pas surjective.
— g n'est pas surjective, donc pas bijective.

Exemple 18. On considère l'application : $h : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^3 & \mapsto \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto (x + 2y, x - z) \end{array}$. Est-elle injective, surjective, bijective ?

— h n'est pas injective car $h((2, -1, 2)) = (0, 0) = h((0, 0, 0))$.
— Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors $h((\alpha, 0, \alpha - \beta)) = (\alpha + 2 \times 0, \alpha - (\alpha - \beta)) = (\alpha, \beta)$. Comme $(\alpha, 0, \alpha - \beta) \in \mathbb{R}^3$, h est surjective.
— h n'est pas injective, donc pas bijective.

4.5 Application réciproque

Définition (Application réciproque)**.**

Si f est une bijection de E sur F, on peut associer à tout $y \in F$ son antécédent unique $x \in E$. On définit ainsi **l'application réciproque** f^{-1} de f.

Proposition.

Soit $x \in E$, $y \in F$, f une application bijective de E dans F et f^{-1} l'application réciproque de f. Alors

$$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x).$$

Exemple 19. Soit f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $]2, +\infty[$ par $f(x) = e^{x-1} + 2$. Montrer que f réalise une bijection de son ensemble de départ vers son ensemble d'arrivée, et déterminer son application réciproque.

— Soit $(x, x') \in \mathbb{R}^2$, on suppose que $f(x) = f(x')$. Alors $e^{x-1} + 2 = e^{x'-1} + 2$, donc $e^{x-1} = e^{x'-1} > 0$. Par passage au logarithme, on trouve $x - 1 = x' - 1$ et donc $x = x'$.
Donc f est injective de $\mathbb{R}$ dans $]2, +\infty[$.
— Soit $y > 2$. On cherche un réel x tel que $f(x) = y$. Le réel $x = \ln(y-2)+1$ convient (et est bien dans l'ensemble de départ).
Donc f est surjective de $\mathbb{R}$ dans $]2, +\infty[$.

Donc f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]2, +\infty[$, et $\forall y > 2$, $f^{-1}(y) = \ln(y - 2) + 1$.