Équations différentielles

Cours de É. Bouchet – PCSI

4 janvier 2023

Table des matières

Dans tout le chapitre, on note I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

1.1 Définitions et structure linéaire

Définition 1.1 (Solution d'une l'équation différentielle d'ordre 1)

Soit a et b deux fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Une fonction y définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est dite **solution** de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ si elle est dérivable sur I et vérifie :

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t).$$

Exemple. La fonction exponentielle est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = 0$.

Définition 1.2 (Équation différentielle homogène associée)

Soit a et b deux fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle **équation différentielle homogène associée** à l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ l'équation dont le second membre est réduit à 0 :

$$y' + a(t)y = 0.$$

Proposition 1.3 (Principe de superposition)

Soit a, b_1 et b_2 trois fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Si y_1 est solution de l'équation $y' + a(t)y = b_1(t)$ et y_2 est solution de l'équation $y' + a(t)y = b_2(t)$, alors pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $(\lambda y_1 + \mu y_2)$ est solution de l'équation $y' + a(t)y = \lambda b_1(t) + \mu b_2(t)$.

Démonstration. y_1 et y_2 sont dérivables sur I, donc $\lambda y_1 + \mu y_2$ l'est aussi par combinaison linéaire. De plus, $\forall t \in I$,

$$\begin{aligned}(\lambda y_1 + \mu y_2)'(t) + a(t)(\lambda y_1 + \mu y_2)(t) &= \lambda y_1'(t) + \mu y_2'(t) + a(t)\lambda y_1(t) + a(t)\mu y_2(t)\\ &= \lambda(y_1'(t) + a(t)y_1(t)) + \mu(y_2'(t) + a(t)y_2(t))\\ &= \lambda b_1(t) + \mu b_2(t),\end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé. □

Remarque. Soit y_P une solution particulière de $y' + a(t)y = b(t)$. Pour toute autre solution y de $y' + a(t)y = b(t)$, la fonction $y - y_P$ est solution de l'équation différentielle avec second membre $b(t) - b(t)$, c'est-à-dire solution de l'équation homogène $y' + a(t)y = 0$. On a peut donc écrire toute solution y de $y' + a(t)y = b(t)$ sous la forme :

$$y = y_H + y_P,$$

où y_P est une solution particulière fixée et $y_H = y - y_P$ est solution de l'équation homogène associée.

1.2 Résolution de l'équation homogène

Proposition 1.4 (Résolution de l'équation homogène)

Soit a une fonction continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ et A une de ses primitives sur I. Les solutions de l'équation différentielle homogène $y' + a(t)y = 0$ sont les fonctions de la forme : $y_H : t \mapsto Ce^{-A(t)}$, où C est une constante de $\mathbb{K}$.

Démonstration. On montre que ces fonctions sont des solutions, et que ce sont les seules :

— Soit y_H définie sur I par $\forall t \in I$, $y_H(t) = Ce^{-A(t)}$. Alors y_H est dérivable sur I comme composée de fonctions dérivables et un calcul de dérivée donne :

$$\forall t \in I, \quad y_H'(t) = -CA'(t)e^{-A(t)} = -A'(t)y_H(t) = -a(t)y_H(t).$$

y_H est donc bien solution de $y' + a(t)y = 0$.

— Réciproquement, soit y une solution de $y' + a(t)y = 0$, montrons que la fonction ye^A est constante sur l'intervalle I. Cette fonction est dérivable comme produit de fonctions dérivables, et :

$$\forall t \in I, \quad (ye^A)'(t) = y'(t)e^{A(t)} + y(t)A'(t)e^{A(t)} = e^{A(t)}\big(y'(t) + a(t)y(t)\big) = 0.$$

La fonction ye^A est donc bien constante sur l'intervalle I.

□

Exercice 1. Déterminer les fonctions à valeurs réelles solutions de l'équation $y' - ty = 0$ sur $\mathbb{R}$.
Solution : Une primitive de $t \mapsto -t$ sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto -\frac{t^2}{2}$, les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme $y\ : t \mapsto \lambda e^{\frac{t^2}{2}}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.3 Recherche d'une solution particulière

Proposition 1.5 (Méthode de la variation de la constante)

Soit a et b deux fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ et A une primitive de a sur I. Une solution particulière de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ est la fonction $y_P : t \mapsto C(t)e^{-A(t)}$, où la fonction C est une primitive de be^A.

Démonstration. Soit y_P la fonction ainsi définie, montrons qu'elle est bien solution de l'équation différentielle. Elle est dérivable sur I comme produit et composée de fonctions dérivables, et un calcul de dérivée donne :

$$\forall t \in I, \quad y_P'(t) = C'(t)e^{-A(t)} + C(t)(-A'(t)e^{-A(t)}) = b(t)e^{A(t)}e^{-A(t)} - C(t)a(t)e^{-A(t)} = -a(t)y_P(t) + b(t).$$

y_P est donc bien solution de l'équation différentielle, ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque. Ce résultat se mémorise facilement en remarquant qu'il faut chercher une solution particulière du type $y = Ce^{-A}$ où C n'est pas une constante mais une fonction.
En injectant cette forme dans $y' + a(t)y = b(t)$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t) &\iff \forall t \in I, \quad C'(t)e^{-A(t)} + C(t)(-A'(t))e^{-A(t)} + a(t)C(t)e^{-A(t)} = b(t) \\
&\iff \forall t \in I, \quad C'(t)e^{-A(t)} - C(t)a(t)e^{-A(t)} + a(t)C(t)e^{-A(t)} = b(t) \\
&\iff \forall t \in I, \quad C'(t) = b(t)e^{A(t)}
\end{aligned}$$

Une telle fonction y est donc bien solution si et seulement si $C' = be^A$.

Exercice 2. Déterminer une solution particulière à valeurs réelles de l'équation différentielle $y' - ty = t$ sur $\mathbb{R}$.
Solution : On a vu dans l'exemple précédent que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y\ : t \mapsto \lambda e^{\frac{t^2}{2}}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour appliquer la méthode de la variation de la constante, on cherche une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto te^{-\frac{t^2}{2}}$. La fonction $t \mapsto -e^{-\frac{t^2}{2}}$ convient.
Une solution particulière est donc la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = -e^{-\frac{t^2}{2}}e^{\frac{t^2}{2}} = -1$ (tout ça pour ça...)
Bien entendu, si on avait eu l'intuition de cette valeur dès le début, on aurait pu se contenter de vérifier qu'elle convenait, sans devoir invoquer la variation de la constante.

Remarque. Lorsqu'on étudie $y' + ay = b(t)$ avec $a \in \mathbb{K}^*$ une constante, on peut éviter l'utilisation de la variation de la constante (et les calculs de primitive qui vont avec) grâce à quelques astuces de calcul :

— Si b est aussi une constante, on cherche une solution particulière y_P constante.
— Si b est polynomiale, on cherche une solution particulière y_P polynomiale, de même degré.

— Si $b(t) = e^{\alpha t}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$, on cherche une solution particulière de type $y_P(t) = \lambda e^{\alpha t}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (si $\alpha \neq -a$) ou de type $y_P(t) = \lambda t e^{\alpha t}$ (si $\alpha = -a$).

— Dans le cas réel, si $b(t) = \sin(\omega t)$ ou $\cos(\omega t)$ avec $\omega \in \mathbb{R}$, on cherche une solution particulière de type $y_P(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
On peut aussi trouver une solution particulière complexe de $y' + a(t)y = e^{i\omega t}$ puis en prendre la partie réelle (si c'est $\cos(\omega t)$) ou la partie imaginaire (si c'est $\sin(\omega t)$).

Exercice 3. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $y' + 3y = t^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$, pour des fonctions à valeurs complexes.
Solution : Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, on pose $y : t \mapsto at^2 + bt + c$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $\forall t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = 2at + b$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + 3y(t) = t^2 + 1 &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad 2at + b + 3at^2 + 3bt + 3c = t^2 + 1 \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad 3at^2 + (2a + 3b)t + b + 3c = t^2 + 1 \\
&\Longleftarrow \begin{cases} 3a = 1 \\ 2a + 3b = 0 \\ b + 3c = 1 \end{cases} \\
&\Longleftarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{2}{9} \\ c = \frac{11}{27} \end{cases}
\end{aligned}$$

Une solution particulière de $y' + 3y = t^2 + 1$ est donc la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = \frac{t^2}{3} - \frac{2t}{9} + \frac{11}{27}$.

Exercice 4. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $y' - 6y = e^{it}$ sur $\mathbb{R}$, pour des fonctions à valeurs complexes.
Solution : Soit $\lambda \in \mathbb{C}^3$, on pose $y : t \mapsto \lambda e^{it}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $\forall t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = \lambda i e^{it}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) - 6y(t) = e^{it} &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda i e^{it} - 6\lambda e^{it} = e^{it} \\
&\iff \lambda(i - 6) = 1 \\
&\iff \lambda = -\frac{6 + i}{37}
\end{aligned}$$

Une solution particulière de $y' - 6y = e^{it}$ est donc la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = -\frac{6+i}{37} e^{it}$.

Exercice 5. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $y' + y = \sin(3t)$ sur $\mathbb{R}$, pour des fonctions à valeurs réelles.
Solution : Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on pose $y : t \mapsto \lambda \cos(3t) + \mu \sin(3t)$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et comme $\forall t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = -3\lambda \sin(3t) + 3\mu \cos(3t)$, on a :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + y(t) = \sin(3t) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad -3\lambda \sin(3t) + 3\mu \cos(3t) + \lambda \cos(3t) + \mu \sin(3t) = \sin(3t) \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin(3t)(-3\lambda + \mu) + \cos(3t)(3\mu + \lambda) = \sin(3t) \\
&\Longleftarrow \begin{cases} -3\lambda + \mu = 1 \\ 3\mu + \lambda = 0 \end{cases} \\
&\Longleftarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{3}{10} \\ \mu = \frac{1}{10} \end{cases}
\end{aligned}$$

Une solution particulière de $y' + y = \sin(3t)$ est donc la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = -\frac{3}{10}\cos(3t) + \frac{1}{10}\sin(3t)$.

1.4 Résolution de l'équation complète

Proposition 1.6 (Solution générale de $y' + a(t)y = b(t)$)

Soit a et b deux fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Les solutions de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ sont les fonctions de la forme $y = y_H + y_P$, où y_H est une solution de l'équation homogène $y' + a(t)y = 0$ et y_P est une solution particulière de $y' + a(t)y = b(t)$.

Démonstration. On a montré en remarque plus tôt dans le chapitre que toute solution y de $y' + a(t)y = b(t)$ peut s'écrire sous la forme $y = y_H + y_P$. Réciproquement, le principe de superposition nous donne que $y_H + y_P$ est solution de $y' + a(t)y = b(t)$, d'où le résultat. □

Remarque. Si l'on combine tous les résultats obtenus jusqu'ici, on aboutit à une solution générale de $y' + a(t)y = b(t)$ de la forme :

$$y : t \mapsto Ce^{-A(t)} + \left(\int_{\alpha}^{t} b(s)e^{A(s)}ds \right) e^{-A(t)},$$

où $C \in \mathbb{K}$ et $\alpha \in I$. Si l'on n'impose aucune condition supplémentaire à y, il existe donc une infinité de solutions, paramétrées par la constante C.

Exercice 6. Déterminer les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle $y' - \frac{y}{t} = t^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Solution : Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t \mapsto -\frac{1}{t}$ est $t \mapsto -\ln(t)$. Les solutions de l'équation différentielle homogène associée sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $y_H \mapsto \lambda e^{+\ln(t)} = \lambda t$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
On cherche maintenant une solution particulière de $y' - \frac{y}{t} = t^2$ en utilisant la méthode de la variation de la constante. Cherchons une primitive de $t \mapsto t^2 e^{-\ln(t)} = t^2 \frac{1}{t} = t$. La fonction $t \mapsto \frac{t^2}{2}$ convient, donc une solution particulière est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $y_P : t \mapsto \frac{t^2}{2} t = \frac{t^3}{2}$.
Les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y' - \frac{y}{t} = t^2$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $y : t \mapsto \lambda t + \frac{t^3}{2}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Attention : le résultat du cours porte sur un *intervalle* I, on n'aurait donc pas pu étendre ce raisonnement à $\mathbb{R}^*$.

Proposition 1.7 (Solution du problème de Cauchy)

Soit a et b deux fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si l'on fixe $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, il existe une unique fonction y dérivable sur I qui satisfait le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + a(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$.

Démonstration. L'existence de la fonction y découle directement des résultats précédents, en ajustant les constantes pour coller à la condition initiale. On peut ainsi utiliser la fonction définie par :

$$\forall t \in I, \quad y(t) = y_0 e^{A(t_0) - A(t)} + \left(\int_{t_0}^{t} b(s)e^{A(s)}ds \right) e^{-A(t)}.$$

Montrons maintenant l'unicité. Soit y_1 et y_2 deux fonctions qui vérifient les conditions. Alors, par principe de superposition, $y_1 - y_2$ est solution de l'équation homogène $y' + a(t)y = 0$, donc il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que $\forall t \in I$, $(y_1 - y_2)(t) = Ce^{-A(t)}$. En particulier pour $t = t_0$, on trouve $y_0 - y_0 = Ce^{-A(t_0)}$, or $e^{-A(t_0)} \neq 0$ donc $C = 0$. Donc $y_1 = y_2$. □

Exercice 7. Déterminer la fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ solution de l'équation $y' - \frac{y}{t} = t^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que $y(1) = 0$.
Solution : Puisque y est solution de l'équation différentielle $y' - \frac{y}{t} = t^2$, l'exercice précédent nous donne l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $y(t) = \lambda t + \frac{t^3}{2}$. Or $y(1) = 0$, donc $0 = \lambda + \frac{1}{2}$, donc $\lambda = -\frac{1}{2}$.
Donc l'unique solution de ce problème de Cauchy est la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $y(t) = -\frac{t}{2} + \frac{t^3}{2}$.

2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

2.1 Définition et structure linéaire

Définition 2.1 (Solution d'une l'équation différentielle d'ordre 2)

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et f une fonction continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Une fonction y définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est dite **solution** de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = f(t)$ si elle est deux fois dérivable sur I et vérifie :

$$\forall t \in I, \quad y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t).$$

Remarque. En physique, on rencontre souvent l'équation $y''(t) + \frac{\omega_0}{Q} y'(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$, il s'agit également d'une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants.

Définition 2.2 (Équation différentielle homogène associée)

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et f une fonction continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle **équation différentielle homogène associée** à l'équation différentielle $y'' + ay' + by = f(t)$ l'équation dont le second membre est réduit à 0 :

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Proposition 2.3 (Principe de superposition)

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et f_1 et f_2 deux fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si y_1 est solution de l'équation $y''+ay'+by = f_1(t)$ et y_2 est solution de $y''+ay'+by = f_2(t)$, alors pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $(\lambda y_1 + \mu y_2)$ est solution de l'équation $y'' + ay' + by = \lambda f_1(t) + \mu f_2(t)$.

Démonstration. y_1 et y_2 sont deux fois dérivables sur I, donc $\lambda y_1 + \mu y_2$ l'est aussi par combinaison linéaire. De plus, $\forall t \in I$,

$$\begin{aligned}(\lambda y_1 + \mu y_2)''(t) + a(\lambda y_1 + \mu y_2)'(t) + b(\lambda y_1 + \mu y_2)(t) &= \lambda y_1''(t) + \mu y_2''(t) + a\lambda y_1'(t) + a\mu y_2'(t) + b\lambda y_1(t) + b\mu y_2(t) \\ &= \lambda(y_1''(t) + ay_1'(t) + by_1(t)) + \mu(y_2''(t) + ay_2'(t) + by_2(t)) \\ &= \lambda f_1(t) + \mu f_2(t),\end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé. □

Remarque. Soit y_P une solution particulière de $y''+ay'+by = f(t)$. Pour toute solution y de $y''+ay'+by = f(t)$, la fonction $y - y_P$ est solution de l'équation différentielle avec second membre $f(t) - f(t)$, c'est-à-dire solution de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$. On a peut donc écrire toute solution y de $y'' + ay' + by = f(t)$ sous la forme :

$$y = y_H + y_P,$$

où y_P est une solution particulière fixée et $y_H = y - y_P$ est solution de l'équation homogène associée.

2.2 Résolution de l'équation homogène

Définition 2.4 (Équation caractéristique)

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. On appelle **équation caractéristique** associée à l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ l'équation $r^2 + ar + b = 0$, d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.

Proposition 2.5 (Solutions de $y'' + ay' + by = 0$ à valeurs complexes)

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et (E) l'équation $r^2 + ar + b = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.

- Si (E) a deux solutions complexes distinctes r_1 et r_2, une fonction y est solution de $y'' + ay' + by = 0$ si et seulement si $\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\forall t \in I$, $y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$.
- Si (E) a une unique solution complexe r_0, une fonction y est solution de $y'' + ay' + by = 0$ si et seulement si $\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\forall t \in I$, $y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{r_0 t}$.

Démonstration. Quitte à avoir $r_1 = r_2 = r_0$ (si $\Delta = 0$), on peut factoriser l'équation caractéristique sous la forme $r^2 + ar + b = (r - r_1)(r - r_2)$. Les relations coefficients-racines donnent alors $a = -(r_1 + r_2)$ et $b = r_1 r_2$.

Soit y une fonction deux fois dérivable sur I, à valeurs dans $\mathbb{C}$. On pose $\forall t \in I$, $z(t) = y(t)e^{-r_1 t}$, de sorte que :

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} y(t) = z(t)e^{r_1 t} \\ y'(t) = e^{r_1 t}\left(z'(t) + r_1 z(t)\right) \\ y''(t) = e^{r_1 t}\left(z''(t) + 2r_1 z'(t) + r_1^2 z(t)\right) \end{cases}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que y soit solution de $y'' + ay' + by = 0$ est alors :

$$\forall t \in I, \quad e^{r_1 t}\left(z''(t) + (\underbrace{2r_1 + a}_{r_1 - r_2})z'(t) + (\underbrace{r_1^2 + ar_1 + b}_{=0})z(t)\right) = 0 \iff \forall t \in I, \quad z''(t) + (r_1 - r_2)z'(t) = 0.$$

On reconnaît alors une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur z', qui s'étudie avec une disjonction de cas :

— Si $r_1 - r_2 \neq 0$ (le cas de deux solutions distinctes), y est solution si et seulement si :

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } \forall t \in I, \quad z'(t) = \lambda e^{-(r_1 - r_2)t},$$

ce qui équivaut en primitivant de nouveau à : $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\forall t \in I$, $z(t) = \frac{-\lambda}{r_1 - r_2} e^{-(r_1 - r_2)t} + \mu$. Comme $y(t) = z(t)e^{r_1 t}$, cette dernière forme équivaut à $\forall t \in I$, $y(t) = \frac{-\lambda}{r_1 - r_2} e^{r_2 t} + \mu e^{r_1 t}$. En posant $C_1 = \mu$ et $C_2 = \frac{-\lambda}{r_1 - r_2}$, on obtient le résultat annoncé.

— Si $r_1 - r_2 = 0$ (le cas d'une unique solution), y est solution si et seulement si :

$$\exists C_2 \in \mathbb{C} \text{ tel que } \forall t \in I, \quad z'(t) = C_2,$$

ce qui équivaut en primitivant de nouveau à : $\exists(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\forall t \in I$, $z(t) = C_1 + C_2 t$. Comme $y(t) = z(t)e^{r_0 t}$, cette dernière forme équivaut à $\forall t \in I$, $y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{r_0 t}$, d'où le résultat annoncé.

$\square$

Exercice 8. Déterminer les fonctions à valeurs complexes solutions de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = 0$.
Solution : Son équation caractéristique est $r^2 - 4r + 3 = 0$. On trouve comme discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$. Elle admet donc deux solutions réelles, $\frac{4-2}{2} = 1$ et $\frac{4+2}{2} = 3$.
Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y : t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{3t}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

Proposition 2.6 (Solutions de $y'' + ay' + by = 0$ à valeurs réelles)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et (E) l'équation $r^2 + ar + b = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.

— Si (E) a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, une fonction y est solution de $y'' + ay' + by = 0$ si et seulement si $\exists(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall t \in I$, $y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$.

— Si (E) a une unique solution réelle r_0, une fonction y est solution de $y'' + ay' + by = 0$ si et seulement si $\exists(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall t \in I$, $y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{r_0 t}$.

— Si (E) a deux solutions complexes conjuguées $r \pm i\omega$ ($r \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$), une fonction y est solution de $y'' + ay' + by = 0$ si et seulement si $\exists(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall t \in I$, $y(t) = \left(C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)\right) e^{rt}$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que les solutions réelles de $y'' + ay' + by = 0$ sont les parties réelles des solutions complexes de $y'' + ay' + by = 0$:

— Si y est une fonction complexe solution de $y'' + ay' + by = 0$, alors sa partie réelle est dérivable deux fois sur I, et on trouve en prenant la partie réelle dans l'égalité $y'' + ay' + by = 0$ (puisque a et b sont réels) :

$$\mathrm{Re}(y)'' + a\,\mathrm{Re}(y)' + b\,\mathrm{Re}(y) = 0.$$

Cela signifie que la fonction $\mathrm{Re}(y)$ est une solution (réelle, donc) de $y'' + ay' + by = 0$.

— Réciproquement, toute fonction réelle solution de $y'' + ay' + by = 0$ peut être vue comme la partie réelle d'une solution complexe de $y'' + ay' + by = 0$ (elle-même).

On en déduit :

— Si $\Delta > 0$ (r_1 et r_2 sont réelles), on cherche la partie réelle de $y : t \mapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$, avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$. On trouve :
$$\forall t \in I, \quad \mathrm{Re}(y(t)) = \mathrm{Re}(C_1 e^{r_1 t}) + \mathrm{Re}(C_2 e^{r_2 t}) = \mathrm{Re}(C_1) e^{r_1 t} + \mathrm{Re}(C_2) e^{r_2 t}.$$
En posant $R_1 = \mathrm{Re}(C_1)$ et $R_2 = \mathrm{Re}(C_2)$, on obtient bien la forme annoncée par le théorème (à un changement de notations près).

— Si $\Delta = 0$ (r_0 est racine double réelle), on raisonne de même.

— Si $\Delta < 0$ (racines complexes conjuguées $r \pm i\omega$), on cherche la partie réelle de $y \ : \ t \mapsto C_1 e^{(r+i\omega)t} + C_2 e^{(r-i\omega)t}$, avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$. On remarque que :
$$\begin{aligned}\forall t \in I, \quad y(t) &= e^{rt}\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right)\\ &= e^{rt}\Big(C_1(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) + C_2(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))\Big)\\ &= e^{rt}\Big((C_1 + C_2)\cos(\omega t) + i(C_1 - C_2)\sin(\omega t)\Big)\end{aligned}$$
Donc :
$$\forall t \in I, \quad \mathrm{Re}(y(t)) = e^{rt}\Big(\mathrm{Re}(C_1 + C_2)\cos(\omega t) + \mathrm{Re}(i(C_1 - C_2))\sin(\omega t)\Big).$$
En posant $R_1 = \mathrm{Re}(C_1 + C_2)$ et $R_2 = \mathrm{Re}(i(C_1 - C_2))$, on obtient bien la forme annoncée par le théorème (à un changement de notations près).

□

Exercice 9. Déterminer les fonctions à valeurs réelles solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.
Solution : Son équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$, de discriminant $\Delta = 0 - 4 = -4 < 0$. Elle admet deux solutions complexes conjuguées, i et $-i$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y : t \mapsto \lambda\cos(t) + \mu\sin(t)$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

2.3 Recherche d'une solution particulière

Quelques astuces permettent de deviner la forme d'une solution particulière de $y'' + ay' + by = f(t)$:

— Si f est une constante, on cherche une solution particulière y_P constante.

— Si f est polynomiale, on cherche une solution particulière y_P polynomiale.

— Si $f(t) = e^{\alpha t}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$, on regarde l'équation caractéristique :
  — si α n'est pas racine, on cherche une solution particulière de type $y_P(t) = \lambda e^{\alpha t}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
  — si α est racine simple, on cherche une solution particulière de type $y_P(t) = \lambda t e^{\alpha t}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
  — si α est racine double, on cherche une solution particulière de type $y_P(t) = \lambda t^2 e^{\alpha t}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

— Si les coefficients a et b sont réels et $f(t) = \sin(\omega t)$ ou $\cos(\omega t)$, on cherche une solution particulière de type $y_P(t) = \lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
On peut aussi trouver une solution particulière complexe de $y'' + ay' + by = e^{i\omega t}$ puis en prendre la partie réelle (si c'est $\cos(\omega t)$) ou la partie imaginaire (si c'est $\sin(\omega t)$).

Exercice 10. Déterminer une solution à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = t^2 + 5$ sur $\mathbb{R}$.
Solution : Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $y \ : t \mapsto a + bt + ct^2$. Elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = b + 2ct$, $y''(t) = 2c$. On a alors :
$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = t^2 + 5 &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad 2c - 3(b + 2ct) + 2(a + bt + ct^2) = t^2 + 5\\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad 2ct^2 + (2b - 6c)t + 2c - 3b + 2a = t^2 + 5\\ &\Longleftarrow \begin{cases} 2c = 1 \\ 2b - 6c = 0 \\ 2c - 3b + 2a = 5 \end{cases}\\ &\Longleftarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \\ a = \frac{17}{4} \end{cases}\end{aligned}$$
Une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = t^2 + 5$ est donc la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = \frac{17}{4} + \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}t^2$.

Exercice 11. Déterminer une solution à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = e^{3t}$ sur $\mathbb{R}$.
Solution : Son équation caractéristique est $r^2 - 4r + 3 = 0$, dont 3 est solution. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose donc $y : t \mapsto \lambda t e^{3t}$. Elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = \lambda e^{3t} + \lambda t 3 e^{3t} = \lambda e^{3t}(1+3t)$, $y''(t) = \lambda 3 e^{3t}(1+3t) + \lambda e^{3t} 3 = 3\lambda e^{3t}(3t+2)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = e^{3t} &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad 3\lambda e^{3t}(3t+2) - 4\lambda e^{3t}(1+3t) + 3\lambda t e^{3t} = e^{3t} \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda e^{3t}\left(9t + 6 - 4 - 12t + 3t\right) = e^{3t} \\
&\iff 2\lambda = 1 \\
&\iff \lambda = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Une solution particulière de $y'' - 4y' + 3y = e^{3t}$ est donc la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = \frac{t}{2} e^{3t}$.

Exercice 12. Déterminer une solution à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = \sin(2t)$ sur $\mathbb{R}$.
Solution : Son équation caractéristique est toujours $r^2 - 4r + 3 = 0$, dont 2 n'est pas solution. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose $y : t \mapsto \lambda e^{2it}$. Elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = 2i\lambda e^{2it}$, $y''(t) = -4\lambda e^{2it}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = e^{2it} &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad -4\lambda e^{2it} - 8i\lambda e^{2it} + 3\lambda e^{2it} = e^{2it} \\
&\iff -4\lambda - 8i\lambda + 3\lambda = 1 \\
&\iff \lambda = -\frac{1}{1+8i} \\
&\iff \lambda = \frac{-1+8i}{65}
\end{aligned}$$

Une solution particulière de $y'' - 4y' + 3y = \sin(2t)$ est donc la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$y(t) = \operatorname{Im}\left(\frac{-1+8i}{65} e^{2it}\right) = \frac{8\cos(2t) - \sin(2t)}{65}.$$

2.4 Résolution de l'équation complète

Proposition 2.7 (Solution générale de $y'' + ay' + by = f(t)$)

Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et f une fonction continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Les solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = f(t)$ sont les fonctions de la forme $y = y_H + y_P$, où y_H est une solution de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$ et y_P est une solution particulière de $y'' + ay' + by = f(t)$.

Démonstration. On a montré en remarque plus tôt dans le chapitre que toute solution y de $y'' + ay' + by = f(t)$ peut s'écrire sous la forme $y = y_H + y_P$. Réciproquement, le principe de superposition nous donne que $y_H + y_P$ est solution de $y'' + ay' + by = f(t)$, d'où le résultat. □

Proposition 2.8 (Solution du problème de Cauchy)

Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et f une fonction continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $t_0 \in I$. Pour tout couple $(y_0, y_0') \in \mathbb{K}^2$, il existe une unique fonction y deux fois dérivable sur I qui satisfait le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

Démonstration. Admis. □

Remarque. Interprétation physique : en mécanique du point, l'équation du mouvement ne suffit pas à déterminer la trajectoire de l'objet. Typiquement, on la détermine en utilisant la position initiale (y_0) et la vitesse initiale (y_0').

Exercice 13. Déterminer l'unique fonction à valeurs réelles solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = \sin(2t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

<u>Solution :</u> D'après l'exemple 8, les solutions de l'équation différentielle homogène associée sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y : t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{3t}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
D'après l'exemple 12, une solution particulière est la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \frac{8\cos(2t)-\sin(2t)}{65}$.
Soit y_0 l'unique solution recherchée. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall t \in \mathbb{R},\ y_0(t) = \lambda e^t + \mu e^{3t} + \frac{8\cos(2t)-\sin(2t)}{65}$.
On a alors $\forall t \in \mathbb{R},\ y_0'(t) = \lambda e^t + 3\mu e^{3t} + \frac{-16\sin(2t)-2\cos(2t)}{65}$.
Puisque $y_0(0) = 0$, on obtient $0 = \lambda + \mu + \frac{8}{65}$. Puisque $y_0'(0) = 0$, on obtient $0 = \lambda + 3\mu - \frac{2}{65}$.
On en déduit que $\mu = \frac{5}{65}$ et $\lambda = -\frac{13}{65}$, donc $\forall t \in \mathbb{R},\ y_0(t) = -\frac{13}{65}e^t + \frac{5}{65}e^{3t} + \frac{8\cos(2t)-\sin(2t)}{65}$.