Espaces probabilisés

Cours de É. Bouchet – ECS1

18 mars 2021

Table des matières

1 σ-algèbre ou tribu

1.1 Définition

Définition (Tribu)**.**

Soit un univers Ω, on dit que $\mathcal{A}$ est une **tribu** (ou σ-algèbre) de Ω lorsque :
- $\Omega \in \mathcal{A}$,
- $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$,
- Pour toute famille dénombrable $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Définition (Événement)**.**

Soit Ω un univers muni d'une tribu $\mathcal{A}$. Un **événement** est un élément de $\mathcal{A}$.

Exemple 1. Donner différentes tribus sur $\Omega = \mathbb{N}$.

$\{\emptyset, \mathbb{N}\}$,

$\{\emptyset, \mathbb{N}, \{0\}, \mathbb{N}^*\}$,

$\{\emptyset, \mathbb{N}, \{0\}, \{5\}, \{0,5\}, \mathbb{N}\setminus\{5\}, \mathbb{N}\setminus\{0,5\}, \mathbb{N}^*\}$,

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (possible seulement car $\mathbb{N}$ est dénombrable),

On choisit la tribu que l'on souhaite utiliser pour qu'elle soit assez détaillée (suffisante pour décrire les événements que l'on considérera), mais pas trop (pour des raisons de simplicité).

Proposition.

Soit Ω un univers, et $\mathcal{A}$ une tribu de Ω. Alors :
- $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- Pour toute famille dénombrable $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Démonstration. (démonstration à connaître)
- $\Omega \in \mathcal{A}$, donc $\emptyset = \overline{\Omega} \in \mathcal{A}$.
- Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$. Alors $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}}$. Comme $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\overline{A_i} \in \mathcal{A}$, alors par réunion dénombrable $\bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i} \in \mathcal{A}$, et donc par passage à l'événement contraire, $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

□

Remarque. Les intersections et réunions d'événements se généralisent facilement au cas dénombrable. Soit Ω un univers, $\mathcal{A}$ une tribu de Ω, I une partie (finie ou non) de $\mathbb{N}$, et $(A_n)_{n\in I}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$, alors :

Distributivité :

$$\forall B \in \mathcal{A}, \quad B \cap \left(\bigcup_{k\in I} A_k\right) = \bigcup_{k\in I} (B\cap A_k) \text{ et } B \cup \left(\bigcap_{k\in I} A_k\right) = \bigcap_{k\in I} (B\cup A_k).$$

Loi de Morgan :

$$\overline{\bigcap_{k\in I} A_k} = \bigcup_{k\in I} \overline{A_k} \text{ et } \overline{\bigcup_{k\in I} A_k} = \bigcap_{k\in I} \overline{A_k}$$

Exemple 2. On lance une pièce équilibrée une infinité de fois. On note P_i l'événement « obtenir pile au i-ème tirage ». Exprimer en fonction de la famille $(P_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ les événements suivants :

— Soit $n \geqslant 1$, obtenir le premier pile au n-ème lancer : $\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{P_i}\right) \cap P_n$

— Obtenir au moins un pile : $\bigcup_{i=1}^{+\infty} P_i$

— Obtenir uniquement des faces : $\bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{P_i}$

— Obtenir au moins une fois deux piles consécutifs : $\bigcup_{i=1}^{+\infty} (P_i \cap P_{i+1})$

— Soit $n \geqslant 2$, obtenir le deuxième pile au n-ème lancer : $\left(\bigcup_{j=1}^{n-1} \left(P_j \cap \left(\bigcap_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{n-1} \overline{P_i}\right)\right)\right) \cap P_n$

Exemple 3. On tire successivement et avec remise une infinité de fois une boule dans une urne contenant $n \in \mathbb{N}^*$ boules numérotées de 1 à n. Pour $i \in \mathbb{N}^*$ on note X_i la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée au i-ème tirage. Exprimer les événements suivants en fonction des X_i :

— Soit $k \geqslant 1$, obtenir la boule 1 pour la première fois au k-ème tirage : $\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{[X_i = 1]}\right) \cap [X_k = 1]$

— Obtenir au moins une fois la boule n : $\bigcup_{i=1}^{+\infty} [X_i = n]$

— Ne jamais obtenir la boule 1 : $\bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{[X_i = 1]}$

— Tous les numéros sont sortis au moins une fois : $\bigcap_{j=1}^{n} \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} [X_i = j]\right)$

1.2 Système complet d'événements

Définition (Système complet d'événements).

Soit Ω un univers et $I \subset \mathbb{N}$. On dit que $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{A}^I$ est un **système complet d'événements** de Ω lorsque $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$ et que $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.

Exemple 4. Si on tire une suite infinie de pièces équilibrées, et qu'on note : pour $i \in \mathbb{N}^*$, P_i : « le premier pile est au i-ème tirage ». Alors :

— $\left(P_1, \overline{P_1}\right)$ est un système complet d'événement,

— $(P_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas un système complet d'événement.
En effet, les P_i sont tous incompatibles deux à deux (le premier pile ne peut pas apparaître à deux moments différents), mais ils ne recouvrent pas Ω. Si $A \subset \Omega$ est l'événement « On ne tire que des face », $A \not\subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} P_i$.

Définition (Tribu engendrée par une famille).

Soit Ω un univers et $\mathcal{B}$ une famille d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$. On appelle **tribu engendrée** par cette famille la plus petite tribu, au sens de l'inclusion, contenant cette famille.

Exemple 5. On s'intéresse en général aux tribus engendrées par des systèmes complets d'événements. Par exemple, si on tire une suite infinie de pièces équilibrées, et qu'on note : pour $i \in \mathbb{N}^*$, P_i : « pile au i-ème tirage », alors

— la tribu engendrée par $\left(P_1, \overline{P_1}\right)$ est :

$$\{\Omega, \emptyset, P_1, \overline{P_1}\}.$$

— la tribu engendrée par $\left(P_1, \overline{P_1} \cap P_2, \overline{P_1} \cap \overline{P_2}\right)$ est :

$$\{\Omega, \emptyset, P_1, \overline{P_1}, \overline{P_1} \cap P_2, \overline{P_2} \cup P_1, P_1 \cup P_2, \overline{P_1} \cap \overline{P_2}\}.$$

2 Espaces probabilisés

2.1 Définition

Définition (Application σ-additive)**.**

Soit Ω un univers et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω. Une application P définie de $\mathcal{A}$ dans $[0,1]$ est dite **σ-additive** lorsqu'elle vérifie : pour toute suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ d'événements de $\mathcal{A}$, deux à deux incompatibles,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P\left(A_i\right).$$

Définition (Probabilité)**.**

Soit Ω un univers et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω. Une **probabilité** est une application P définie sur $\mathcal{A}$, à valeurs dans $[0,1]$, σ-additive et telle que $P(\Omega) = 1$.

Remarque. Lorsque P est une probabilité, on dit que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.

Exemple 6. On tire aléatoirement un entier de $\mathbb{N}^*$ avec la probabilité P qui à $n \in \mathbb{N}^*$ associe une chance de tirer n de $\frac{1}{2^n}$. Calculer la probabilité P_1 de tirer un nombre $n > 10$, la probabilité P_2 de tirer un nombre n multiple de 3 et la probabilité P_3 de tirer un nombre dont le reste est 3 si on le divise par 4.
On commence par définir des événements élémentaires plus manipulables. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n =$« tirer le nombre n ». Puisque ces événements sont incompatibles deux à deux, on trouve alors par σ-additivité de P :

$$P_1 = P\left(\bigcup_{n=11}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=11}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=11}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2^{11}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}.$$

$$P_2 = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_{3n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_{3n}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{3n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{8^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{8}} - 1 = \frac{8}{7} - 1 = \frac{1}{7}.$$

$$P_3 = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_{4n+3}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_{4n+3}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{4n+3}} = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n} = \frac{1}{8}\frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{2}{15}.$$

2.2 Propriétés

Proposition (Lien avec les opérations sur les événements)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A, B) \in \mathcal{A}^2$. Alors :
- $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$,
- $P(\emptyset) = 0$,
- Si $A \subset B$, alors $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Proposition (Croissance de P).

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. P est une application croissante (au sens de l'inclusion) :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2, A \subset B \Longrightarrow P(A) \leqslant P(B).$$

Démonstration. Ces deux résultats se montrent exactement comme dans le cas des probabilités sur les espaces finis. □

Proposition (Lien entre probabilité et système complet d'événements).

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

— Si $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet fini d'événements de Ω, alors $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

— Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet dénombrable d'événements de Ω, alors la série $\sum P(A_i)$ converge et $\sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i) = 1$.

Démonstration. (démonstration à connaître) Le premier cas se montre exactement comme dans le cas fini. Pour le deuxième cas, il suffit d'utiliser les propriétés d'un système complet d'événements et la σ-additivité de P (qui garantit au passage la convergence de la série) :

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P\left(A_i\right).$$

□

2.3 Conditionnement et indépendance

Définition (Probabilité conditionnelle).

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit $B \in \mathcal{A}$ tel que $P(B) \neq 0$. On définit un nouvel espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P_B)$ par

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

P_B est appelée **probabilité conditionnelle** relative à B, et $P_B(A)$ est la probabilité de A sachant B, parfois aussi notée $P(A|B)$.

Remarque. La définition est exactement la même que pour le cas des probabilités sur des ensembles finis. On peut donc en déduire que la formule de Bayes, la formule des probabilités composées, et tout ce qui en découle sont toujours vérifiées.

Définition (Famille d'événements mutuellement indépendants)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements de $\mathcal{A}$. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une **famille d'événements mutuellement indépendants** lorsque pour toute sous partie finie $J \subset I$,

$$P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} P\left(A_i\right).$$

Exemple 7. On lance un nombre infini de pièces équilibrées. Soit $n \geqslant 3$. Calculer la probabilité P_1 d'obtenir le premier PF aux $n-1$ et n-ème tirages, sachant que l'on a obtenu FP au deux premiers tirages.
Soit $i \in \mathbb{N}^*$, on note F_i l'événement « obtenir face au tirage i ». Comme $P(F_1 \cap \overline{F_2}) = \frac{1}{4} \neq 0$, la définition du conditionnement et l'indépendance des lancers donnent :

$$P_1 = \frac{P(F_1 \cap \left(\bigcap_{i=2}^{n-1} \overline{F_i}\right) \cap F_n)}{P(F_1 \cap \overline{F_2})} = \frac{P(F_1)\left(\prod_{i=2}^{n-1} P(\overline{F_i})\right) P(F_n)}{P(F_1)P(\overline{F_2})} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

En effet, après avoir obtenu FP, on est obligé de n'obtenir que des P jusqu'au premier PF.

2.4 Formule des probabilités totales

Théorème (Formule des probabilités totales)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de Ω. Alors pour tout $B \in \mathcal{A}$,

$$P\left(B\right) = \sum_{i\in I} P\left(B \cap A_i\right).$$

Démonstration. On décompose l'événement B sur le système complet d'événements $(A_i)_{i\in I}$:

$$B = \bigcup_{i\in I} \left(B \cap A_i\right),$$

et les $(B \cap A_i)$ sont incompatibles deux à deux. La σ-additivité de la probabilité donne alors le résultat. $\square$

Exemple 8. On considère une infinité d'urnes numérotées par les entiers de $\mathbb{N}^*$, et telles que pour $i \in \mathbb{N}^*$, l'urne U_i contienne $i!$ boules numérotées de 1 à $i!$. On choisit une urne au hasard selon la loi suivante : pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on choisit l'urne U_i avec probabilité $\frac{1}{2^i}$. Puis on tire une boule au hasard dans cette urne. Calculer la probabilité de tirer la boule numéro 1.
Soit $i \in \mathbb{N}^*$, on note A_i l'événement « l'urne i est choisie », et G l'événement « on tire la boule numéro 1 ». Comme les A_i forment un système complet d'événements et que $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $P(A_i) = \frac{1}{2^i} \neq 0$, la formule des probabilités totales donne :

$$P(G) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(G \cap A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)P_{A_i}(G) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \times \frac{1}{i!} = e^{\frac{1}{2}} - 1 \simeq 0,35.$$

2.5 Propriétés de la limite monotone

Définition (Presque sûr, négligeable)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et $(A, B) \in \mathcal{A}^2$.
- Si $P(A) = 1$, on dit que A est un événement **presque sûr**.
- Si $P(B) = 0$, on dit que B est un événement **négligeable**.
- Une propriété vérifiée sur un ensemble de probabilité 1 est dite vraie **presque sûrement** (parfois abrévié p.s.).

Théorème (Théorème de limite monotone, cas croissant)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$ croissante au sens de l'inclusion. Alors

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(C_n\right).$$

Remarque. La croissance au sens de l'inclusion indique que $C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset \dots$.

Remarque. Si $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements croissante, on savait déjà que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $P\left(\bigcup_{n=1}^{N} C_n\right) = P\left(C_N\right)$. Ce résultat est une généralisation de cette égalité dans le cas d'une union infinie.

Démonstration. On admet ce résultat, qui se montre par σ-additivité de P après s'être ramené à une union d'événements deux à deux incompatibles.

□

Exemple 9. Un joueur joue indéfiniment à un jeu qui conduit à 1 chance sur 100 de gagner. On note G l'événement « le joueur gagne au moins une fois », et pour $n \in \mathbb{N}^*$, G_n l'événement « le joueur gagne au moins une fois au cours des n premières parties ». Montrer que G est un événement presque sûr.
On remarque que les G_n forment une suite d'événements croissants car $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $G_i \subset G_{i+1}$. De plus, $G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n$. Soit $i \in \mathbb{N}^*$, on pose A_i l'événement « le joueur perd la i-ème partie », l'indépendance des parties donne alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(G_n) = 1 - P\left(\overline{G_n}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(A_i) = 1 - \left(\frac{99}{100}\right)^n.$$

Donc par théorème de limite monotone et puisque $\left|\frac{99}{100}\right| < 1$,

$$P(G) = \lim_{n\to\infty} P(G_n) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \left(\frac{99}{100}\right)^n\right) = 1.$$

Théorème (Théorème de limite monotone, cas décroissant)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$ décroissante au sens de l'inclusion. Alors

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} D_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(D_n\right).$$

Démonstration. Soit (D_n) une suite décroissante d'événements, alors $(\overline{D_n})$ est une suite croissante d'événements. On a donc, par les lois de Morgan et le théorème de limite monotone (cas croissant),

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} D_n\right) = P\left(\overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{D_n}}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{D_n}\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} P(\overline{D_n}) = \lim_{n\to+\infty} (1 - P(\overline{D_n})) = \lim_{n\to+\infty} P(D_n).$$

□

Exemple 10. On lance une pièce de monnaie équilibrée une infinité de fois. On note B l'événement « n'obtenir que des faces au cours du jeu », et pour $n \in \mathbb{N}^*$, B_n l'événement « n'obtenir que des faces aux n premiers lancers ». Montrer que B est un événement négligeable. A-t-on $B = \emptyset$?
Les B_n forment une suite d'événements décroissants, puisque $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $B_{i+1} \subset B_i$. De plus, $B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$. Soit $i \in \mathbb{N}^*$, on pose A_i l'événement « obtenir face au i-ème lancer », l'indépendance des lancers donne alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(B_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Donc par théorème de limite monotone et puisque $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$,

$$P(B) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) = 0.$$

Mais $B \neq \emptyset$: il peut être réalisé en ne tirant que des faces.

Proposition (Conséquence des théorèmes de limite monotone)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et soit (A_n) une suite d'événements de $\mathcal{A}$. Alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \quad \text{et} \quad P\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Démonstration. Pour la première égalité, on définit une suite d'événements C par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $C_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Par construction, C est croissante au sens de l'inclusion. On peut donc lui appliquer le théorème de limite monotone, cas croissant :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i\right) = \lim_{n\to+\infty} P(C_n) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right).$$

La deuxième égalité se montre de même en appliquant le théorème de limite monotone cas décroissant à la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $D_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. □

3 Variables aléatoires

3.1 Définition

Définition (Variable aléatoire)**.**

Soit X une application définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que c'est une **variable aléatoire réelle** sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$[X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{A}.$$

Remarque. La contrainte $[X \leqslant x] \in \mathcal{A}$ permet de s'assurer qu'il sera toujours possible de calculer $P(X \leqslant x)$.

Remarque. Soit X une variable aléatoire réelle, on a en particulier :

1. $[X > x] \in \mathcal{A}$.
   En effet, $[X \leqslant x] \in \mathcal{A}$, donc par passage au complémentaire $[X > x] = \overline{[X \leqslant x]} \in A$.
2. $[a < X \leqslant b] \in \mathcal{A}$.
   En effet, $[X \leqslant b] \in \mathcal{A}$, et on a montré que $[X > a] \in A$. Donc $[a < X \leqslant b] = [X \leqslant b] \cap [X > a] \in \mathcal{A}$.
3. $[X = x] \in \mathcal{A}$.
   On commence par montrer par double inclusion que $[X = x] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} [x - \frac{1}{n} < X \leqslant x]$:
   - Soit $\omega \in [X = x]$. Alors $X(\omega) = x$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x - \frac{1}{n} < X(\omega) \leqslant x$. Donc $\omega \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [x - \frac{1}{n} < X \leqslant x]$ et on a montré que $[X = x] \subset \bigcap_{n=1}^{+\infty} [x - \frac{1}{n} < X \leqslant x]$.
   - Soit $\omega \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [x - \frac{1}{n} < X \leqslant x]$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x - \frac{1}{n} < X(\omega) \leqslant x$. Un passage à la limite en n donne alors $X(\omega) = x$ par encadrement. Donc $\omega \in [X = x]$ et on a montré que $\bigcap_{n=1}^{+\infty} [x - \frac{1}{n} < X \leqslant x] \subset [X = x]$.

   D'où l'égalité annoncée. Or $[x - \frac{1}{n} < X \leqslant x] \in \mathcal{A}$ par le deuxième point de la remarque. Donc $[X = x] \in \mathcal{A}$ par intersection dénombrable.

3.2 Fonction de répartition

Définition (Fonction de répartition)**.**

Soit X une variable aléatoire, on appelle **fonction de répartition de X** la fonction F_X définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$F_X(x) = P(X \leqslant x).$$

Proposition (Propriétés de la fonction de répartition)**.**

Si F_X est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X, alors

1. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$,
2. F_X est continue à droite sur $\mathbb{R}$,
3. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$,
4. $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

Démonstration. (démonstration des deux derniers points à connaître)

1. Soit x et y deux réels tels que $x \leqslant y$. Alors $[X \leqslant x] \subset [X \leqslant y]$, donc par croissance de la probabilité, $F_X(x) \leqslant F_X(y)$. La fonction F_X est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction F_X est croissante sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une limite à droite finie en x (théorème de la limite monotone pour les fonctions), et par composition de limites :

   $$\lim_{t \to x, t > x} F_X(t) = \lim_{n \to +\infty} F_X\left(x + \frac{1}{n}\right)$$

   La suite $([X \leqslant x + \frac{1}{n}])_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'événements, donc d'après le théorème de limite monotone (pour les probabilités),

   $$\lim_{n \to +\infty} P\left(X \leqslant x + \frac{1}{n}\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[X \leqslant x + \frac{1}{n}\right]\right) = P(X \leqslant x).$$

Donc $\lim\limits_{t\to x, t>x} F_X(t) = P(X \leqslant x) = F_X(x)$ et F_X est continue à droite en x.

3. La fonction F_X est croissante sur $\mathbb{R}$ et minorée par 0. Par le théorème de la limite monotone (pour les fonctions), elle admet donc une limite finie en $-\infty$, et on trouve par composée :

$$\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = \lim_{n\to+\infty} F_X(-n)$$

La suite $([X \leqslant -n])_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'événements, donc d'après le théorème de limite monotone (pour les probabilités),

$$\lim_{n\to+\infty} P(X \leqslant -n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} [X \leqslant -n]\right) = P(\emptyset).$$

Donc $\lim\limits_{t\to-\infty} F_X(t) = P(\emptyset) = 0$, et $\lim\limits_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$.

4. La fonction F_X est croissante sur $\mathbb{R}$ et majorée par 1. Par le théorème de la limite monotone (pour les fonctions), elle admet donc une limite finie en $+\infty$, et on trouve par composée :

$$\lim_{t\to+\infty} F_X(t) = \lim_{n\to+\infty} F_X(n)$$

La suite $([X \leqslant n])_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante d'événements, donc d'après le théorème de la limite monotone (pour les probabilités),

$$\lim_{n\to+\infty} P(X \leqslant n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [X \leqslant n]\right) = P(\Omega).$$

Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} F_X(t) = P(\Omega) = 1$, et $\lim\limits_{t\to+\infty} F_X(t) = 1$.

$\square$