Espaces vectoriels de dimension finie

Cours de É. Bouchet – ECS1

18 mars 2021

Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels de dimension finie

1.1 Définition

Définition (Espace vectoriel de dimension finie)**.**

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dit que E est un **espace vectoriel de dimension finie** lorsqu'il admet une famille génératrice comportant un nombre fini d'éléments, c'est-à-dire lorsqu'il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ de vecteurs de E tels que

$$E = \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2, \dots, f_n)\,.$$

Remarque. Par convention, $E = \{0_E\}$ est un espace vectoriel de dimension finie.

Exemple 1. On a déjà rencontré notamment :
- $\mathbb{K}^n$, espace vectoriel de dimension finie engendré par la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.
- $\mathbb{K}_n[X]$, espace vectoriel de dimension finie engendré par la base $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.

1.2 Liens entre familles libres et familles génératrices d'un espace vectoriel

Proposition (Modification d'une famille génératrice)**.**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) une de ses familles génératrices. Alors pour tout vecteur $e_1 \neq 0_E$, on peut extraire $n-1$ vecteurs de $\mathcal{F}$ (que par réindexation éventuelle on note $f_2, ..., f_n$) tels que la famille $(e_1, f_2, \dots, f_n)$ est une famille génératrice de E.

Démonstration. (démonstration à connaître) La famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ est génératrice de E et $e_1 \in E$ donc il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$e_1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k,$$

où les α_k ne sont pas tous nuls (sinon on aurait $e_1 = 0$). Quitte à réindexer $(f_1, f_2, \dots, f_n)$, on peut supposer que $\alpha_1 \neq 0$. Alors :

$$e_1 = \alpha_1 f_1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k f_k \quad \text{et donc} \quad f_1 = \frac{1}{\alpha_1}\left(e_1 - \sum_{k=2}^{n} \alpha_k f_k\right). \tag{1}$$

Prouvons maintenant que $(e_1, f_2, \dots, f_n)$ est génératrice de E. Soit $x \in E$. Comme $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ est génératrice de E, il existe $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$x = \sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k \overset{(1)}{=} \beta_1 \frac{1}{\alpha_1}\left(e_1 - \sum_{k=2}^{n} \alpha_k f_k\right) + \sum_{k=2}^{n} \beta_k f_k = \frac{\beta_1}{\alpha_1} e_1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\beta_k - \frac{\beta_1 \alpha_k}{\alpha_1}\right) f_k.$$

Donc x s'écrit comme une combinaison linéaire de $(e_1, f_2, \dots, f_n)$. Cette famille est donc bien génératrice de E. $\square$

Exemple 2. La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$, et $(X+1)^2 \neq 0$. On peut donc trouver une nouvelle famille qui engendre $\mathbb{K}_n[X]$:

$$((X+1)^2, X, X^2, \dots, X^n) \text{ ou } ((X+1)^2, 1, X^2, \dots, X^n) \text{ ou } ((X+1)^2, 1, X, X^3 \dots, X^n)$$

Théorème (Cardinaux des familles libres et génératrices)**.**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et non réduit à $\{0_E\}$. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre finie de E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E, alors

$$\mathrm{Card}(\mathcal{L}) \leqslant \mathrm{Card}(\mathcal{G}).$$

Démonstration. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on suppose que $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est une famille génératrice de E et que $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une famille libre de E. La famille $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est libre, donc $e_1 \neq 0$ et le résultat précédent donne que (quitte à réindexer), $(e_1, f_2, \dots, f_n)$ est génératrice de E. Donc e_2 peut s'écrire comme combinaison linéaire de $(e_1, f_2, \dots, f_n)$ et il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$e_2 = \alpha_1 e_1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k f_k,$$

où au moins un des coefficients autre que α_1 est non nul (sinon e_1 et e_2 seraient linéairement dépendants). Supposons (quitte à réindexer $(f_2, \dots, f_n)$) que $\alpha_2 \neq 0$. Alors :

$$f_2 = \frac{1}{\alpha_2}\left(e_2 - \alpha_1 e_1 - \sum_{k=3}^{n} \alpha_k f_k\right).$$

On montre alors comme dans la preuve précédente que $(e_1, e_2, f_3, \dots, f_n)$ est une famille génératrice de E.
Supposons que $p > n$. En réitérant ce raisonnement n fois, on montre que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E. e_p s'écrit donc comme combinaison linéaire de $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Mais c'est impossible, car $(e_1, e_2, \dots, e_n, \dots, e_p)$ est une famille libre. Donc $p \leqslant n$. □

1.3 Existence de bases en dimension finie

Théorème (Existence de bases en dimension finie)**.**

Tout espace vectoriel E de dimension finie et non réduit à $\{0_E\}$ admet au moins une base.

Démonstration. Soit E un espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ et de dimension finie. Alors il possède une famille génératrice ayant un nombre fini d'éléments $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_q)$, avec $q \in \mathbb{N}^*$. Alors

— Si $\mathcal{F}$ est libre, c'est une base de E.
— Si $\mathcal{F}$ n'est pas libre alors il existe au moins un vecteur de $\mathcal{F}$ qui s'écrit comme une combinaison linéaire des autres. On peut alors le retirer sans perdre le caractère générateur de la famille. Quitte à réindexer les éléments de $\mathcal{F}$, on suppose qu'il s'agit de e_q. Donc $\mathcal{F}_1 = (e_1, e_2, \dots, e_{q-1})$ est génératrice de E.
  Si $\mathcal{F}_1$ est libre, alors c'est une base de E. Sinon l'un des vecteur de $\mathcal{F}_1$ s'écrit comme une combinaison linéaire des autres et on peut le retirer à son tour. Quitte à ré-indexer, on montre alors que $\mathcal{F}_2 = (e_1, e_2, \dots, e_{q-2})$ est génératrice de E.
  Par un nombre fini d'itérations successives de ce raisonnement (on est sûr qu'il termine car une famille contenant un seul élément non nul est toujours libre), on obtient une famille $\mathcal{F}_m = (e_1, e_2, \dots, e_{q-m})$ qui est génératrice de E et libre. On a donc une base de E.

□

Théorème (Dimension d'un espace vectoriel)**.**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$. Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Cet entier naturel est appelé la **dimension** de l'espace vectoriel et est noté $\dim(E)$.

Remarque. Si $E = \{0_E\}$, on pose par convention $\dim(E) = 0$.

Démonstration. Soit n et p deux entiers naturels non nuls et soit $\mathcal{B}_1 = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$ et $\mathcal{B}_2 = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ deux bases de E. Alors :

- $\mathcal{B}_1$ est libre et $\mathcal{B}_2$ est génératrice de E donc $n \geqslant p$.
- $\mathcal{B}_2$ est libre et $\mathcal{B}_1$ est génératrice de E donc $p \geqslant n$.

Donc $n = p$. □

Exemple 3. On a :

- $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel de dimension n , dont une base est la base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
- $\mathbb{K}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension $n+1$, dont une base est la base $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension np , dont une base est

$$(E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1p}, E_{21}, \ldots, E_{2p}, \ldots E_{k1}, \ldots, E_{kp}, \ldots E_{n1}, \ldots, E_{np}),$$

  où E_{ij} est la matrice ne contenant que des zéros, sauf un 1 à la $i$ème ligne et $j$ème colonne.

Corollaire.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

- Toute famille libre $\mathcal{L}$ de E vérifie $\mathrm{Card}(\mathcal{L}) \leqslant n$.
- Toute famille génératrice $\mathcal{G}$ de E vérifie $\mathrm{Card}(\mathcal{G}) \geqslant n$.

Remarque. L'hypothèse $n \in \mathbb{N}^*$ permet ici d'écarter le cas $E = \{0_E\}$.

1.4 Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition (Rang d'une famille finie de vecteurs)**.**

Soit E un espace vectoriel et soit $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle **rang** de la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ et on note $\mathrm{rg}\,(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre :

$$\mathrm{rg}\,(f_1, f_2, \ldots, f_p) = \dim\left(\mathrm{Vect}\,(f_1, f_2, ..., f_p)\right).$$

Remarque. La famille étant finie, $\mathrm{Vect}\,(f_1, f_2, ..., f_p)$ est nécessairement un espace vectoriel de dimension finie (il possède une famille génératrice finie), on peut donc bien utiliser sa dimension.

Exemple 4. Dans $\mathbb{K}_2[X]$,

- $\mathrm{rg}(X, X^2) = 2$ puisque (X, X^2) forme une famille libre (c'est une sous-famille de la base canonique).
- $\mathrm{rg}(1, X+1, X, X^2) = \mathrm{rg}(1, X, X^2) = 3$ puisque $X+1$ est combinaison linéaire de X et de 1 et qu'ensuite la famille $(1, X, X^2)$ est libre.
- $\mathrm{rg}((X+1)^2, X^2) = 2$ puisque $((X+1)^2, X^2)$ forme une famille libre (à montrer).

1.5 Théorème de la base incomplète

Théorème (Théorème de la base incomplète)**.**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{L} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une famille libre de E de cardinal $p \in [\![1, n]\!]$. Alors la famille $\mathcal{L}$ peut-être complétée par $n - p$ vecteurs $e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n$ de E pour former une base de E.

Démonstration. On a plusieurs cas :

— Si $\mathcal{L}$ est génératrice, c'est une base de E (et $p = n$).

— Si $\mathcal{L}$ n'est pas génératrice alors il existe au moins un vecteur $x \in E$ qui ne s'écrit pas comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}$. On montre alors que $\mathcal{L}_1 = (e_1, e_2, \ldots, e_p, x)$ est alors une famille libre : soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \lambda) \in \mathbb{K}^{p+1}$, on suppose que :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \lambda x = 0_E.$$

Si $\lambda \neq 0$, $\dfrac{1}{\lambda} \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = x$, ce qui est impossible par hypothèse. Donc $\lambda = 0$. Puis, comme $\mathcal{L}$ est libre, les λ_i sont tous nuls. Donc $\mathcal{L}_1$ est libre.

  — Si $\mathcal{L}_1$ est génératrice, alors c'est une base de E.

  — Sinon l'un des vecteur $y \in E$ ne s'écrit pas comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}_1$. On pose alors $\mathcal{L}_2 = (e_1, e_2, \ldots, e_p, x, y)$ et on itère le raisonnement précédent.

  — Par un nombre fini d'itérations successives (une famille libre ne peut pas être de cardinal strictement supérieur à $n = \dim(E)$), on obtient une famille $\mathcal{L}_m$ qui est génératrice de E et libre. Donc $\mathcal{L}_m$ est une base de E, qui complète $\mathcal{L}$. On a alors $\mathrm{Card}(\mathcal{L}_m) = \dim(E) = n$, ce qui signifie qu'on a rajouté $n - p$ éléments à $\mathcal{L}$.

□

Exemple 5. Compléter $(X + 2, X + 1)$ en une base de $\mathbb{K}_3[X]$.
Ajouter des vecteurs de la base canonique de l'espace considéré est généralement un bon moyen de compléter une famille libre. Ici, $(X + 2, X + 1, X^2, X^3)$ est un exemple qui fonctionne.

1.6 Conditions sur le cardinal pour avoir une base

Proposition.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E. Alors $\mathcal{L}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{Card}(\mathcal{L}) = n$.
2. Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. Alors $\mathcal{G}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{Card}(\mathcal{G}) = n$.

Démonstration. (démonstration à connaître) Dans les deux cas, l'implication directe est évidente avec la définition de la dimension et il faut montrer la réciproque.

1. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre telle que $\mathrm{Card}(\mathcal{L}) = n$. Par le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base en rajoutant 0 vecteurs de E. Donc c'est une base.
2. Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice telle que $\mathrm{Card}(\mathcal{G}) = n$. Supposons que $\mathcal{G}$ n'est pas libre. Alors l'un des éléments de $\mathcal{G}$ est combinaison linéaire des autres, et on peut le retirer. La famille $\mathcal{F}$ ainsi obtenue est toujours une famille génératrice et son cardinal est $n - 1$. C'est impossible pour une famille génératrice d'un espace de dimension n, qui possède toujours au moins n éléments. Donc $\mathcal{G}$ est libre et c'est une base.

□

Exemple 6. Montrer que $1, X+1, X^2+X+1$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
On commence par montrer que la famille est libre : soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on suppose que $a+b(X+1)+c(X^2+X+1) = 0$. Alors $cX^2+(c+b)X+a+b+c = 0$. Par identification des coefficients du polynôme, on obtient $c = c+b = c+b+a = 0$ et donc $a = b = c = 0$. Cette famille est donc libre, or elle possède $3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$ éléments. Donc c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

1.7 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

Théorème (Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie)**.**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et G un sous-espace vectoriel de E. Alors G est un espace vectoriel de dimension finie et

$$\dim(G) \leqslant \dim(E).$$

De plus, si $\dim(G) = \dim(E)$, alors $G = E$.

Démonstration. Si $G = \{0_E\}$, le résultat est immédiat. Sinon, on a trois points à montrer :

— On sait déjà que G est un espace vectoriel, montrons qu'il est de dimension finie. Comme $G \neq \{0_E\}$, il existe une famille $(e_1, \dots, e_p)$ libre de G. Cette famille est également libre dans E, ce qui donne directement $p \leqslant \dim(E)$. Soit A l'ensemble des cardinaux des familles libres de G. On vient de montrer que A est non vide et à valeurs dans $[\![1, \dim(E)]\!]$, il admet donc un maximum. Dans la suite, on suppose donc (quitte à changer de famille) que $p = \max(A)$.
On raisonne ensuite par l'absurde : supposons que $(e_1, \dots, e_p)$ n'est pas génératrice. Il existe alors $x \in G$ qui n'est pas combinaison linéaire des e_i. Donc $(e_1, \dots, e_p, x)$ est une famille libre de G, de cardinal $p+1 > p = \max(A)$: impossible. Donc $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille génératrice et comme elle a un nombre fini d'éléments, G est un espace vectoriel de dimension finie.

— Montrons $\dim(G) \leqslant \dim(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de G, qui existe puisque cet espace est de dimension finie non nulle. $\mathcal{B}$ est alors aussi une famille libre de E. Comme E est de dimension finie, $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) \leqslant \dim(E)$. D'où $\dim(G) \leqslant \dim(E)$.

— Il reste enfin à traiter le cas d'égalité. Supposons que $\dim(G) = \dim(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de G, alors $\mathcal{B}$ est une famille libre de E à $\dim(E)$ éléments. C'est donc une base de E et $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = G$.

□

Exemple 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{AS}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer $\dim(\mathcal{AS}_2(\mathbb{R}))$.
   Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{AS}_2(\mathbb{R})$. Alors $a = d = 0$ et $-b = c$. Donc
   $$M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ étant antisymétrique, elle forme une famille génératrice de $\mathcal{AS}_2(\mathbb{R})$. Puisqu'elle est de plus non nulle, c'est une famille libre. On a donc trouvé une base de $\mathcal{AS}_2(\mathbb{R})$ à 1 élément. Donc $\dim(\mathcal{AS}_2(\mathbb{R})) = 1$.
2. Déterminer $\dim(\mathcal{S}_2(\mathbb{R}))$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Alors $b = c$. Donc

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les trois matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ étant symétriques, elles forment une famille génératrice de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.
Montrons maintenant la liberté : soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, on suppose que $\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Alors $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et par identification des coefficients $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille est donc libre et c'est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ à 3 éléments. Donc $\dim(\mathcal{S}_2(\mathbb{R})) = 3$.

3. Conjecturer les valeurs de $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$ et $\dim(\mathcal{AS}_n(\mathbb{R}))$.
   Une matrice symétrique M est entièrement décrite par la donnée de ses coefficients m_{ij} pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$. On conjecture alors qu'une base de cet espace est constituée d'autant d'éléments qu'il y a de tels coefficients :

$$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} 1 = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}.$$

   Une matrice antisymétrique M est entièrement décrite par la donnée de ses coefficients m_{ij} pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$. On conjecture alors qu'une base de cet espace est constituée d'autant d'éléments qu'il y a de tels coefficients :

$$\dim(\mathcal{AS}_n(\mathbb{R})) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} 1 = \sum_{j=1}^{n} (j-1) = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Définition (Sous-espaces particuliers, cas particuliers).

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$.
- Une **droite vectorielle** de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension 1.
- Un **plan vectoriel** de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2.
- Un **hyperplan vectoriel** de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

Exemple 8. 1. Les hyperplans vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont les droites vectorielles, engendrées par un élément non nul.
2. Les hyperplans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont les plans vectoriels, engendrés par deux éléments non colinéaires.

2 Compléments sur les espaces vectoriels

2.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Proposition (Somme de deux sous-espaces vectoriels).

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. L'ensemble H des éléments de E s'écrivant sous la forme de la somme d'un élément de F et d'un élément de G est un sous-espace vectoriel de E appelé **somme des sous-espaces vectoriels** F et G. On note :

$$H = F + G = \{u \in E \text{ tel que } u = x + y \text{ avec } (x, y) \in F \times G\}.$$

Démonstration.

- $0_E \in F \cap G$, donc $0_E = 0_E + 0_E \in H$ et H est non vide.
- Soit $(u, v) \in H^2$ et λ un scalaire. Alors $u = x_u + y_u$ avec $(x_u, y_u) \in F \times G$ et $v = x_v + y_v$ avec $(x_v, y_v) \in F \times G$. Donc
$$\lambda u + v = \lambda(x_u + y_u) + (x_v + y_v) = (\lambda x_u + x_v) + (\lambda y_u + y_v),$$
où $\lambda x_u + x_v \in F$ et $\lambda y_u + y_v \in G$ puisque F et G sont stables par combinaison linéaire. Donc $\lambda u + v \in H$.

Donc H est un sous-espace vectoriel de E. □

2.2 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Définition (Somme directe de deux sous-espaces vectoriels)**.**

Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $F + G$ est une **somme directe** lorsque
$$F \cap G = \{0\}.$$
Elle est alors notée $F \oplus G$.

Remarque. Comme F et G sont des espaces vectoriels, on a toujours $\{0\} \subset F \cap G$. Il suffit donc de montrer que $F \cap G \subset \{0\}$ pour montrer qu'une somme est directe.

Exemple 9. Montrer que $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}((0, 1)) \oplus \text{Vect}((1, 0))$.

- On sait que $\text{Vect}((0, 1)) \subset \mathbb{R}^2$ et que $\text{Vect}((1, 0)) \subset \mathbb{R}^2$, donc $\text{Vect}((0, 1)) + \text{Vect}((1, 0)) \subset \mathbb{R}^2$. Par ailleurs, soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on peut écrire :
$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) \in \text{Vect}((0, 1)) + \text{Vect}((1, 0)),$$
donc $\mathbb{R}^2 \subset \text{Vect}((0, 1)) + \text{Vect}((1, 0))$. Par double inclusion, $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}((0, 1)) + \text{Vect}((1, 0))$.
- Il ne reste plus qu'à montrer que la somme est directe. Soit $(x, y) \in \text{Vect}((0, 1)) \cap \text{Vect}((1, 0))$. Alors $(x, y) \in \text{Vect}((0, 1))$ donc $x = 0$. Et $(x, y) \in \text{Vect}((1, 0))$ donc $y = 0$. Donc $(x, y) = (0, 0)$.
Ainsi $\text{Vect}((0, 1)) \cap \text{Vect}((1, 0)) \subset \{(0, 0)\}$.

Donc $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}((0, 1)) \oplus \text{Vect}((1, 0))$.

Proposition.

Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. La somme $F + G$ est une somme directe si et seulement si tout élément u de $F + G$ s'écrit de manière unique sous la forme :
$$u = x + y \text{ avec } (x, y) \in F \times G.$$

Démonstration.

- Supposons que $F+G$ est une somme directe. Soit $u \in F+G$, supposons qu'on puisse écrire $u = x_1+y_1 = x_2+y_2$, avec $(x_1, y_1) \in F \times G$ et $(x_2, y_2) \in F \times G$. Alors :
$$\underbrace{x_1 - x_2}_{\in F} = \underbrace{y_1 - y_2}_{\in G}.$$
Donc $x_1 - x_2 \in F \cap G = \{0_E\}$, c'est-à-dire $x_1 = x_2$. De même, $y_1 = y_2$. La décomposition de u est donc unique.

- Réciproquement, supposons que tout élément u de $F+G$ s'écrit de manière unique sous la forme $u=x+y$ avec $(x,y)\in F\times G$. Soit $u\in F\cap G$, on peut le décomposer comme $u=u+0$ et comme $u=0+u$. L'unicité de la décomposition donne $u=0_E$. Donc $F\cap G=\{0_E\}$ et la somme est directe.

□

2.3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition (Sous-espaces vectoriels supplémentaires)**.**

Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E lorsque $E=F\oplus G$.

Remarque. Un même espace vectoriel peut avoir plusieurs supplémentaires différents.

Exemple 10. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, $\mathrm{Vect}(X^2)$ et $\mathrm{Vect}(X^2+1)$ sont deux supplémentaires de $\mathbb{R}_1[X]$.

Proposition (Existence d'un supplémentaire en dimension finie)**.**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n\in\mathbb{N}^*$, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F admet un sous-espace vectoriel supplémentaire G dans E.

Démonstration. (démonstration à connaître) Soit $(e_1,\dots,e_k)$ une base de F. Cette famille est libre dans E, donc par le théorème de la base incomplète on peut la compléter en une base $(e_1,\dots,e_k,e_{k+1},\dots,e_n)$ de E. Montrons que $G=\mathrm{Vect}((e_{k+1},\dots,e_n))$ est un supplémentaire de F dans E.

- Il est évident par construction de G que $F+G\subset E$. Par ailleurs, soit $x\in E$. Comme $(e_1,\dots,e_k,e_{k+1},\dots,e_n)$ est une base de E, il existe des scalaires λ_1, …, λ_n tels que :

$$x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i e_i+\sum_{i=k+1}^{n}\lambda_i e_i.$$

  Or $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i e_i\in F$ et $\sum_{i=k+1}^{n}\lambda_i e_i\in G$ (par définition de G). Donc $x\in F+G$, et $E\subset F+G$. On en déduit par double inclusion que $E=F+G$.
- Il reste à montrer que la somme est directe. Soit $x\in F\cap G$. Comme $x\in F=\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)$, il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\in\mathbb{K}^k$ tels que $x=\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\lambda_i e_i$. Et comme $x\in G=\mathrm{Vect}((e_{k+1},\dots,e_n))$, il existe $(\lambda_{k+1},\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^{n-k}$ tels que $x=\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n}\lambda_i e_i$. En soustrayant ces deux égalités, on trouve $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\lambda_i e_i-\sum_{i=k+1}^{n}\lambda_i e_i=0_E$. Comme la famille $(e_1,\dots,e_n)$ est libre (c'est une base), on en déduit que tous les λ_i sont nuls. Donc $x=0_E$, et $F\cap G=\{0_E\}$. Donc $E=F\oplus G$.

□

Exemple 11. Soit $F=\{P\in\mathbb{R}_2[X]|P(1)=0\}$. Déterminer un supplémentaire à F dans $\mathbb{R}_2[X]$.
On commence par chercher une base de F.
Soit $P\in F$, alors il existe des réels a, b, c tels que $P(X)=aX^2+bX+c$. Comme $P(1)=0$, on a $a+b+c=0$. Donc

$$P(X)=aX^2+bX-a-b=a(X^2-1)+b(X-1).$$

Comme $X^2-1 \in F$ et $X-1 \in F$, ces deux vecteurs forment une famille génératrice de F.
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $\alpha(X^2-1)+\beta(X-1)=0$. Alors $\alpha X^2+\beta X-\alpha-\beta=0$ et par identification des coefficients, $\alpha=\beta=0$. Donc la famille est libre.
Donc $(X^2-1, X-1)$ est une base de F.

Complétons cette base en une base de $\mathbb{R}_2[X]$, par exemple en lui ajoutant un vecteur de la base canonique : 1 (d'autres choix étaient possibles).
Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On suppose que $\alpha(X^2-1)+\beta(X-1)+\gamma=0$. Alors $\alpha X^2+\beta X-\alpha-\beta+\gamma=0$, et par identification des coefficients, $\alpha=\beta=\gamma=0$. Donc $(X^2-1, X-1, 1)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$. Comme c'est une famille à $3=\dim(\mathbb{R}_2[X])$ éléments, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

On pose $G=\operatorname{Vect}(1)$. La démonstration précédente garantit alors que G est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_2[X]$.
Rédaction à adopter pour conclure quand on aura vu les caractérisations des supplémentaires en dimension finie : $1 \neq 0$ est une base de G. Juxtaposer une base de F et une base de G donne une base de $\mathbb{R}_2[X]$, donc G est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Variante : on peut écrire $P \in F$ comme $P(X)=a(X-1)(X-b)$ si on préfère utiliser la forme factorisée que la développée. De même, on peut utiliser les racines des polynômes plutôt que leurs coefficients pour montrer la liberté. On obtient alors que $(X(X-1), X-1)$ est une base de F. La complétion s'effectue ensuite de la même façon.

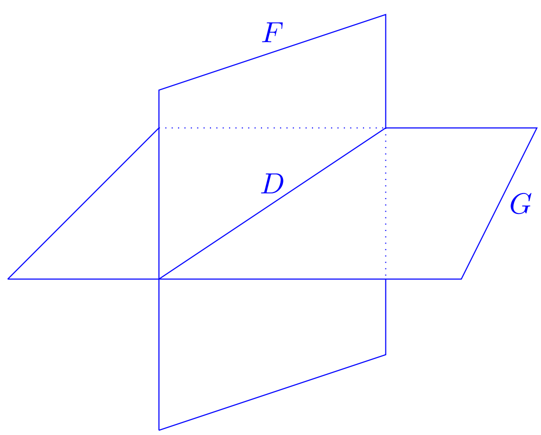
2.4 Formule de Grassman

Théorème (Formule de Grassman)**.**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et G_1 et G_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors :

$$\dim\left(G_1+G_2\right)=\dim(G_1)+\dim(G_2)-\dim\left(G_1 \cap G_2\right).$$

Exemple 12. Considérons deux plans vectoriels F et G d'un espace E, qui se coupent selon une droite D.



On a bien $\dim(F+G)=3=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F \cap G)$.

2.5 Caractérisation de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires

Théorème.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E,
2. $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = n$,
3. $E = F + G$ et $\dim(F) + \dim(G) = n$,
4. Si B_1 est une base de F et B_2 est une base de G, la famille B obtenue en juxtaposant les vecteurs de B_1 et ceux de B_2 est une base de E.

Démonstration.

— Montrons (1) $\Longrightarrow$ (2). On suppose que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Alors $F \cap G = \{0_E\}$ et la formule de Grassman donne : $n = \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) - 0 = \dim(F) + \dim(G)$.

— Montrons (2) $\Longrightarrow$ (3). On suppose que $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = n$. Alors

$$\dim(E) = n = \dim(F) + \dim(G) = \dim(F + G) + 0 = \dim(F + G).$$

Comme $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E, on a donc $E = F + G$.

— Montrons (3) $\Longrightarrow$ (4). On suppose que $E = F + G$ et $\dim(F) + \dim(G) = n$. Soit $B_1 = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F et $B_2 = (g_1, \dots, g_q)$ une base de G (ces bases existent puisqu'on est en dimension finie non nulle). On pose $B = (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$, montrons qu'il s'agit d'une base de E.
Soit $x \in E$. Comme $E = F + G$, il existe $y \in F$ et $z \in G$ tels que $x = y + z$. Or, puisque B_1 est une base de F et B_2 une base de G, il existe aussi des scalaires a_1, …, a_p et b_1, …, b_q tels que

$$y = \sum_{i=1}^{p} a_i f_i \text{ et } z = \sum_{i=1}^{q} b_i g_i.$$

On en déduit que $x = \sum_{i=1}^{p} a_i f_i + \sum_{i=1}^{q} b_i g_i \in \mathrm{Vect}(B)$. Donc B est une famille génératrice de E. Or, elle compte $p + q = n = \dim(E)$ éléments. Donc c'est une base de E.

— Montrons (4) $\Longrightarrow$ (1). Soit $B_1 = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F et $B_2 = (g_1, \dots, g_q)$ une base de G. On suppose que la famille $B = (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base de E. Montrons d'abord que $E = F + G$. Il est immédiat que $F + G \subset E$, il suffit donc de montrer l'inclusion réciproque. Soit $x \in E$. Comme B est une base de E, il existe des scalaires a_1, …, a_p, b_1, …, b_q tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} a_i f_i + \sum_{i=1}^{q} b_i g_i.$$

Notons $y = \sum_{i=1}^{p} a_i f_i$ et $z = \sum_{i=1}^{q} b_i g_i$. On a alors $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Vect}(B_1) = F$ et $z \in \mathrm{Vect}(B_2) = G$. Donc $x \in F + G$, et $E = F + G$.
Montrons ensuite que $F \cap G = \{0_E\}$. Soit $x \in F \cap G$. Comme $x \in F$, il existe des scalaires a_1, …, a_p tels que $x = \sum_{i=1}^{p} a_i f_i$. Et comme $x \in G$, il existe des scalaires b_1, …, b_q tels que $x = \sum_{i=1}^{q} b_i g_i$. On a donc

$$\sum_{i=1}^{p} a_i f_i - \sum_{i=1}^{q} b_i g_i = 0_E,$$

et comme B est libre, les scalaires a_i et b_i sont tous nuls. En particulier, $x = 0_E$. D'où le résultat.
Rmq : pour montrer $F \cap G = \{0_E\}$, on pouvait également utiliser la relation $E = F + G$ et la formule de Grassman : $\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G) = p + q - \dim(E) = 0$, d'où $F \cap G = \{0_E\}$.

□

2.6 Somme et somme directe de k sous-espaces vectoriels

Proposition (Somme de k sous-espaces vectoriels)**.**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et $k \in [\![2, n]\!]$. Soit F_1, F_2, …, F_k des sous-espaces vectoriels de E. On appelle **somme des k sous-espaces vectoriels** F_1, F_2, …, F_k et on note $F = \sum_{i=1}^{k} F_i$ l'ensemble des éléments $u \in E$ s'écrivant sous la forme $u = \sum_{j=1}^{k} u_j$, avec pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, $u_j \in F_j$.

Remarque. $F = \sum_{i=1}^{k} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition (Somme directe de k sous-espaces vectoriels)**.**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et $k \in [\![2, n]\!]$. Soit F_1, F_2, …, F_k des sous-espaces vectoriels de E. La somme $F = \sum_{i=1}^{k} F_i$ est une **somme directe** lorsque tout élément de F s'écrit d'une manière unique sous la forme $u = \sum_{j=1}^{k} u_j$, avec pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, $u_j \in F_j$. On note alors $F = \bigoplus_{i=1}^{k} F_i$.

Exemple 13. On a : $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Vect}(e_i)$, où les e_i sont les vecteurs de la base canonique.

2.7 Caractérisations de sommes directes en dimension finie

Proposition (Caractérisations de sommes directes en dimension finie)**.**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et $k \in [\![2, n]\!]$. Soit F_1, F_2, …, F_k des sous-espaces vectoriels de E, munis respectivement des bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, …, $\mathcal{B}_k$. On note $F = \sum_{i=1}^{k} F_i$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. F_1, F_2, …, F_k sont en somme directe.
2. $\forall (u_1, u_2, \dots, u_k) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_k, \quad u_1 + u_2 + \cdots + u_k = 0 \Longrightarrow \forall i \in [\![1, k]\!], u_i = 0.$
3. La famille obtenue en juxtaposant une base $\mathcal{B}_1$ de F_1, une base $\mathcal{B}_2$ de F_2, …et une base $\mathcal{B}_k$ de F_k est une base de F.
4. $\dim(F) = \sum_{j=1}^{k} \dim(F_j)$.

Démonstration. On montre que (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (1), puis que (3) $\Longrightarrow$ (4) et (4) $\Longrightarrow$ (3). □