Espaces vectoriels de dimension finie

Cours de É. Bouchet – PCSI

6 mars 2023

Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définition et existence de bases

1.1 Familles génératrices finies

Définition 1.1 (Espace vectoriel de dimension finie)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est un **espace vectoriel de dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie.

Remarque. E est donc de dimension finie lorsqu'il existe une famille $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ de vecteurs de E tels que

$$E = \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2, \ldots, f_n)\,.$$

Remarque. Par convention, $\{0_E\}$ est un espace vectoriel de dimension finie.

Exemple. On a déjà rencontré notamment :
- $\mathbb{K}^n$, espace vectoriel de dimension finie engendré par la base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
- $\mathbb{K}_n[X]$, espace vectoriel de dimension finie engendré par la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, espace vectoriel de dimension finie engendré par la base canonique $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$.

Proposition 1.2 (Modification d'une famille génératrice)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et non réduit à $\{0_E\}$ et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ une de ses familles génératrices. Alors pour tout vecteur $e_1 \neq 0_E$, on peut extraire $n-1$ vecteurs de $\mathcal{F}$ (que par réindexation éventuelle on note $f_2, \ldots, f_n$) tels que la famille $(e_1, f_2, \ldots, f_n)$ est une famille génératrice de E.

Démonstration. La famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est génératrice de E et $e_1 \in E$ donc il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$e_1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k,$$

où les α_k ne sont pas tous nuls (sinon on aurait $e_1 = 0$). Quitte à réindexer $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, on peut supposer que $\alpha_1 \neq 0$. Alors :

$$e_1 = \alpha_1 f_1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k f_k \quad \text{et donc} \quad f_1 = \frac{1}{\alpha_1}\left(e_1 - \sum_{k=2}^{n} \alpha_k f_k\right). \tag{1}$$

Prouvons maintenant que $(e_1, f_2, \ldots, f_n)$ est génératrice de E. Les vecteurs de cette famille sont bien dans E. On pose ensuite $x \in E$. Comme $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est génératrice de E, il existe $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$x = \sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k \overset{(1)}{=} \beta_1 \frac{1}{\alpha_1}\left(e_1 - \sum_{k=2}^{n} \alpha_k f_k\right) + \sum_{k=2}^{n} \beta_k f_k = \frac{\beta_1}{\alpha_1} e_1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\beta_k - \frac{\beta_1 \alpha_k}{\alpha_1}\right) f_k.$$

Donc x s'écrit comme une combinaison linéaire de $(e_1, f_2, \ldots, f_n)$. Cette famille est donc bien génératrice de E. □

Exemple. La famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$, et $(X+1)^2 \neq 0$. On peut donc trouver une nouvelle famille qui engendre $\mathbb{K}_n[X]$:

$$((X+1)^2, X, X^2, \ldots, X^n) \text{ ou } ((X+1)^2, 1, X^2, \ldots, X^n) \text{ ou } ((X+1)^2, 1, X, X^3 \ldots, X^n)$$

Proposition 1.3 (Cardinaux des familles libres et génératrices)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et non réduit à $\{0_E\}$. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre finie de E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E, alors $\mathrm{Card}(\mathcal{L}) \leqslant \mathrm{Card}(\mathcal{G})$.

Remarque. Une famille n'est pas un ensemble, mais on lui étend la définition de cardinal pour simplifier les écritures.

Démonstration. Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on suppose que $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est une famille génératrice de E et que $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une famille libre de E. La famille $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est libre, donc $e_1 \neq 0$ et le résultat précédent donne que (quitte à réindexer), $(e_1, f_2, \ldots, f_n)$ est génératrice de E. Donc e_2 peut s'écrire comme combinaison linéaire de $(e_1, f_2, \ldots, f_n)$ et il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$e_2 = \alpha_1 e_1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k f_k,$$

où au moins un des coefficients autre que α_1 est non nul (sinon e_1 et e_2 seraient linéairement dépendants). Supposons (quitte à réindexer $(f_2, \ldots, f_n)$) que $\alpha_2 \neq 0$. Alors :

$$f_2 = \frac{1}{\alpha_2}\left(e_2 - \alpha_1 e_1 - \sum_{k=3}^{n} \alpha_k f_k\right).$$

On montre alors comme dans la preuve précédente que $(e_1, e_2, f_3, \ldots, f_n)$ est une famille génératrice de E.
Supposons que $p > n$. En réitérant ce raisonnement n fois, on montre que la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de E. Le vecteur e_p s'écrit donc comme combinaison linéaire de $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Mais c'est impossible, car $(e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots, e_p)$ est une famille libre. Donc $p \leqslant n$. □

1.2 Construction de bases

Proposition 1.4 (Théorème de la base extraite)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et non réduit à $\{0_E\}$. De toute famille génératrice finie de E, on peut extraire une base finie de E.

Démonstration. E est de dimension finie, donc possède une famille génératrice ayant un nombre fini d'éléments $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \ldots, e_q)$, avec $q \in \mathbb{N}^*$. Alors

- Si $\mathcal{F}$ est libre, c'est une base de E.
- Si $\mathcal{F}$ n'est pas libre alors il existe au moins un vecteur de $\mathcal{F}$ qui s'écrit comme une combinaison linéaire des autres. On peut alors le retirer sans perdre le caractère générateur de la famille. Quitte à réindexer les éléments de $\mathcal{F}$, on suppose qu'il s'agit de e_q. Donc $\mathcal{F}_1 = (e_1, e_2, \ldots, e_{q-1})$ est génératrice de E.
  Si $\mathcal{F}_1$ est libre, alors c'est une base de E. Sinon l'un des vecteur de $\mathcal{F}_1$ s'écrit comme une combinaison linéaire des autres et on peut le retirer à son tour. Quitte à ré-indexer, on montre alors que $\mathcal{F}_2 = (e_1, e_2, \ldots, e_{q-2})$ est génératrice de E.
  Par un nombre fini d'itérations successives de ce raisonnement (on est sûr qu'il termine car une famille contenant un seul élément non nul est toujours libre : le nombre de vecteurs q est un variant de boucle), on obtient une famille $\mathcal{F}_m = (e_1, e_2, \ldots, e_{q-m})$ qui est génératrice de E et libre. On a donc une base de E.

□

Proposition 1.5 (Existence de bases en dimension finie)

Tout espace vectoriel E de dimension finie et non réduit à $\{0_E\}$ admet au moins une base (finie).

Démonstration. E possède une famille génératrice finie, il suffit d'y appliquer le théorème de la base extraite pour obtenir une base. □

Exercice 1. Soit $E = \mathrm{Vect}(1, 1 + X, 5 + X)$. Déterminer une base de E.
Solution : Par construction, $(1, 1+X, 5+X)$ est une famille génératrice. Or $5+X = (1+X)+4\times 1$, donc $(1, 1+X)$ est également une famille génératrice. De plus, $(1, 1+X)$ est échelonnée en degré, donc libre. Donc $(1, 1+X)$ est une base de E.

Proposition 1.6 (Théorème de la base incomplète)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et non réduit à $\{0_E\}$. Toute famille libre de E peut être complétée en une base finie de E.

Démonstration. E est de dimension finie, donc admet une famille génératrice $(g_1, \ldots, g_n)$ à $n \in \mathbb{N}^*$ éléments. Soit $\mathcal{L} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une famille libre de E. Par comparaison des cardinaux, on a $p \in [\![1, n]\!]$.

— Si $\mathcal{L}$ est génératrice, c'est une base de E.

— Si $\mathcal{L}$ n'est pas génératrice alors il existe au moins un vecteur x pris dans $(g_1, \ldots, g_n)$ qui ne s'écrit pas comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}$. On montre alors que $\mathcal{L}_1 = (e_1, e_2, \ldots, e_p, x)$ est alors une famille libre : soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \lambda) \in \mathbb{K}^{p+1}$, on suppose que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \lambda x = 0_E$. Si $\lambda \neq 0$, $\displaystyle\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = x$, ce qui est impossible par hypothèse. Donc $\lambda = 0$. Puis, comme $\mathcal{L}$ est libre, les λ_i sont tous nuls. Donc $\mathcal{L}_1$ est libre.
  — Si $\mathcal{L}_1$ est génératrice, alors c'est une base de E.
  — Sinon un vecteur y de $(g_1, \ldots, g_n)$ ne s'écrit pas comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}_1$. On pose alors $\mathcal{L}_2 = (e_1, e_2, \ldots, e_p, x, y)$ et on itère le raisonnement précédent.
  — Par un nombre fini d'itérations successives (une famille libre ne peut pas être de cardinal strictement supérieur à n : le nombre $n - p$ est un variant de boucle), on obtient une famille $\mathcal{L}_m$ qui est génératrice de E et libre. Donc $\mathcal{L}_m$ est une base de E, qui complète $\mathcal{L}$.

$\square$

Remarque. Cette preuve montre également que si $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ engendre E et si $(x_i)_{i \in I}$ est libre pour une certaine partie I de $[\![1, n]\!]$, alors il existe une partie J de $[\![1, n]\!]$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j \in J}$ est une base de E.

Exercice 2. Compléter $(X + 2, X + 1)$ en une base de $\mathbb{R}_3[X]$. On admet (la suite du chapitre le justifiera) qu'il suffit d'obtenir une famille libre à quatre éléments.
Solution : On sait que $(1, X, X^2, X^3)$ est génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$ (puisque c'est la base canonique). On peut donc utiliser cette famille pour compléter $(X + 2, X + 1)$. Montrons que $(X + 2, X + 1, X^2, X^3)$ fonctionne :
Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^3$. On suppose que $a(X+2)+b(X+1)+cX^2+dX^3 = 0$. Alors $(2a+b)+(a+b)X+cX^2+dX^3 = 0$ et par identification des coefficients, $2a - b = a + b = c = d = 0$. On en déduit $a = b = c = d = 0$, donc $(X + 2, X + 1, X^2, X^3)$ est une famille libre à quatre éléments. Donc c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

2 Dimension d'un espace de dimension finie

2.1 Définition et premières propriétés

Définition 2.1 (Dimension d'un espace vectoriel)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$. Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Cet entier naturel est appelé la **dimension** de l'espace vectoriel et est noté $\dim(E)$.

Remarque. Si $E = \{0_E\}$, on pose par convention $\dim(E) = 0$.

Démonstration. Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et soit $\mathcal{B}_1 = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$ et $\mathcal{B}_2 = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ deux bases de E. Alors :

— $\mathcal{B}_1$ est libre et $\mathcal{B}_2$ est génératrice de E donc $n \geqslant p$.

— $\mathcal{B}_2$ est libre et $\mathcal{B}_1$ est génératrice de E donc $p \geqslant n$.

Donc $n = p$. Donc toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. $\square$

Exemple. Cas des espaces vectoriels usuels (à connaître) :

— $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel de dimension n, dont une base est $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

— $\mathbb{K}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension $n + 1$, dont une base est $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$.

— $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension np, dont une base est $(E_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$.

Exemple. On a vu dans un chapitre précédent que $(((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une base de l'espace vectoriel des suites vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
De manière générale, l'ensemble des suites récurrentes linéaires doubles vérifiant une relation donnée est un espace vectoriel de dimension 2.

Exercice 3. Montrer que l'ensemble E des solutions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $-2y'' + y' + 3y = 0$ est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension.
<u>Solution :</u> L'équation caractéristique de cette équation différentielle est $-2x^2 + x + 3$, avec $x \in \mathbb{R}$. Son discriminant vaut $\Delta = 25 > 0$ et ses solutions sont -1 et $\frac{3}{2}$.
Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, le cours sur les équations différentielles donne donc :

$$f \in E \iff \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Ae^{-x} + Be^{\frac{3}{2}x} \iff f \in \mathrm{Vect}(x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{\frac{3}{2}x}),$$

ces deux fonctions étant effectivement dans E. La famille $(x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{\frac{3}{2}x})$ est donc génératrice de E.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on suppose que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda e^{-x} + \mu e^{\frac{3}{2}x} = 0$. Diviser par $e^{-x} \neq 0$ donne $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda + \mu e^{\frac{5}{2}x} = 0$. La limite pour $x \to -\infty$ donne $\lambda = 0$ et Le cas $x = 0$ donne $\mu = 0$. La famille $(x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{\frac{3}{2}x})$ est donc libre.
Donc $(x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{\frac{3}{2}x})$ est une base de E. Donc $\dim(E) = 2$.

Remarque : on pourrait montrer de même que :
- si $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$, l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{K}$ de l'équation différentielle linéaire homogène $ay'' + by' + cy = 0$ est un espace vectoriel de dimension 2.
- si a est une fonction continue, l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{K}$ de l'équation différentielle linéaire homogène $y' + a(x)y = 0$ est un espace vectoriel de dimension 1.

2.2 Caractérisations des bases

Proposition 2.2 (Cardinal d'une famille libre ou génératrice)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :
- Toute famille libre $\mathcal{L}$ de E vérifie $\mathrm{Card}(\mathcal{L}) \leqslant n$.
- Toute famille génératrice $\mathcal{G}$ de E vérifie $\mathrm{Card}(\mathcal{G}) \geqslant n$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = n$.
- $\mathcal{L}$ est libre et $\mathcal{B}$ est génératrice, donc $\mathrm{Card}(\mathcal{L}) \leqslant n$.
- $\mathcal{G}$ est génératrice et $\mathcal{B}$ est libre, donc $\mathrm{Card}(\mathcal{G}) \geqslant n$.

□

Remarque. L'hypothèse $n \in \mathbb{N}^*$ permet d'écarter le cas $E = \{0_E\}$.

Proposition 2.3 (Caractérisation des familles libres ou génératrices par le cardinal)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
- Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E. Alors $\mathcal{L}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{Card}(\mathcal{L}) = n$.
- Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. Alors $\mathcal{G}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{Card}(\mathcal{G}) = n$.

Démonstration. Dans les deux cas, l'implication directe est évidente avec la définition de la dimension et il faut montrer la réciproque.
- Soit $\mathcal{L}$ une famille libre telle que $\mathrm{Card}(\mathcal{L}) = n$. Supposons que $\mathcal{L}$ n'est pas génératrice. Alors il existe $x \in E$ tel que x ne s'écrit pas comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{L}$. La famille $\mathcal{F}$ obtenue en ajoutant x à $\mathcal{L}$ est donc toujours libre et son cardinal est $n+1$. C'est impossible pour une famille libre d'un espace de dimension n, qui possède toujours au plus n éléments. Donc $\mathcal{L}$ est génératrice et c'est une base.

— Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice telle que $\text{Card}(\mathcal{G}) = n$. Supposons que $\mathcal{G}$ n'est pas libre. Alors l'un des éléments de $\mathcal{G}$ est combinaison linéaire des autres, et on peut le retirer. La famille $\mathcal{F}$ ainsi obtenue est toujours une famille génératrice et son cardinal est $n-1$. C'est impossible pour une famille génératrice d'un espace de dimension n, qui possède toujours au moins n éléments. Donc $\mathcal{G}$ est libre et c'est une base.

□

Exercice 4. Montrer que $(1, X+1, X^2+X+1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
Solution : $(1, X+1, X^2+X+1)$ est une famille de polynômes échelonnée en degré, elle est donc libre. Or c'est une famille à 3 éléments et $3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$. Donc $(1, X+1, X^2+X+1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2.3 Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition 2.4 (Rang d'une famille finie de vecteurs)

Soit E un espace vectoriel et $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle **rang** de la famille $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ et on note $\text{rg}\,(f_1, f_2, \dots, f_p)$ la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre :

$$\text{rg}\,(f_1, f_2, \dots, f_p) = \dim\left(\text{Vect}\,(f_1, f_2, \dots, f_p)\right).$$

Remarque. La famille étant finie, $\text{Vect}\,(f_1, f_2, \dots, f_p)$ est nécessairement un espace vectoriel de dimension finie (il possède une famille génératrice finie), on peut donc bien étudier sa dimension.

Proposition 2.5 (Lien entre rang et liberté)

Soit E un espace vectoriel et $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ une famille finie de vecteurs de E. Alors $\text{rg}(f_1, \dots, f_p) \leqslant p$ et :

$$\text{rg}(f_1, \dots, f_p) = p \iff (f_1, \dots, f_p) \text{ est libre.}$$

Démonstration. $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ est génératrice de $\text{Vect}\,(f_1, f_2, \dots, f_p)$, donc :

$$\text{rg}(f_1, \dots, f_p) = \dim\left(\text{Vect}\,(f_1, f_2, \dots, f_p)\right) \leqslant \text{Card}((f_1, f_2, \dots, f_p)) = p.$$

De plus, $\text{rg}(f_1, \dots, f_p) = p \iff \dim\left(\text{Vect}\,(f_1, f_2, \dots, f_p)\right) = p$ et on a vu que dans un espace vectoriel de dimension p, une famille à p éléments est libre si et seulement si c'est une base de l'espace, d'où :

$$\text{rg}(f_1, \dots, f_p) = p \iff (f_1, \dots, f_p) \text{ est libre.}$$

□

Exercice 5. Dans $\mathbb{K}_2[X]$, déterminer les valeurs de $\text{rg}(X, X^2)$, $\text{rg}(1, X+1, X, X^2)$ et $\text{rg}((X+1)^2, X^2)$.
Solution :
— $\text{rg}(X, X^2) = 2$ puisque (X, X^2) forme une famille libre (c'est une sous-famille de la base canonique).
— $\text{rg}(1, X+1, X, X^2) = \text{rg}(1, X, X^2) = 3$ puisque $X+1$ est combinaison linéaire de X et de 1 et qu'ensuite la famille $(1, X, X^2)$ est libre.
— Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, on suppose que $a(X+1)^2 + bX^2 = 0$. Évaluer cette expression en $X = -1$ donne $b = 0$, l'évaluer en $X = 0$ donne $a = 0$, donc $((X+1)^2, X^2)$ forme une famille libre. Donc $\text{rg}((X+1)^2, X^2) = 2$.

3 Sous-espaces et dimensions

3.1 Sous-espace d'un espace vectoriel de dimension finie

Proposition 3.1 (Sous-espace d'un espace vectoriel de dimension finie)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et G un sous-espace vectoriel de E. Alors G est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim(G) \leqslant \dim(E)$. De plus, si $\dim(G) = \dim(E)$, alors $G = E$.

Démonstration. Si $G = \{0_E\}$, le résultat est immédiat. Sinon, on a trois points à montrer :

— On sait déjà que G est un espace vectoriel, montrons qu'il est de dimension finie. Comme $G \neq \{0_E\}$, il existe une famille $(e_1, \ldots, e_p)$ libre de G. Cette famille est également libre dans E, ce qui donne directement $p \leqslant \dim(E)$.
Soit A l'ensemble des cardinaux des familles libres de G. On vient de montrer que A est non vide et à valeurs dans $[\![1, \dim(E)]\!]$, il admet donc un maximum. Dans la suite, on suppose donc (quitte à changer de famille) que $p = \max(A)$.
On raisonne ensuite par l'absurde : supposons que $(e_1, \ldots, e_p)$ n'est pas génératrice. Il existe alors $x \in G$ qui n'est pas combinaison linéaire des e_i. Donc $(e_1, \ldots, e_p, x)$ est une famille libre de G, de cardinal $p+1 > p = \max(A)$: impossible. Donc $(e_1, \ldots, e_p)$ est une famille génératrice et comme elle a un nombre fini d'éléments, G est un espace vectoriel de dimension finie.

— Montrons $\dim(G) \leqslant \dim(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de G (qui existe d'après le point précédent). $\mathcal{B}$ est alors aussi une famille libre de E. Comme E est de dimension finie, $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) \leqslant \dim(E)$. D'où $\dim(G) \leqslant \dim(E)$.

— Il reste enfin à traiter le cas d'égalité. Supposons que $\dim(G) = \dim(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de G, alors $\mathcal{B}$ est une famille libre de E à $\dim(E)$ éléments. C'est donc une base de E et $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = G$.

□

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer $\dim(\mathcal{A}_2(\mathbb{R}))$.
<u>Solution :</u> Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$. Alors $a = d = 0$ et $-b = c$. Donc $M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ étant antisymétrique, elle forme une famille génératrice de $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$. Puisqu'elle est non nulle, c'est une famille libre. On a donc trouvé une base de $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ à 1 élément. Donc $\dim(\mathcal{A}_2(\mathbb{R})) = 1$.
2. Déterminer $\dim(\mathcal{S}_2(\mathbb{R}))$.
<u>Solution :</u> Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Alors $b = c$. Donc $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Les trois matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ étant symétriques, elles forment une famille génératrice de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Montrons la liberté : soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, on suppose que $\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Alors $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et par identification des coefficients $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille est donc libre et c'est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ à 3 éléments. Donc $\dim(\mathcal{S}_2(\mathbb{R})) = 3$.
3. Conjecturer les valeurs de $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$ et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.
<u>Solution :</u> Une matrice symétrique M est entièrement décrite par la donnée de ses coefficients m_{ij} pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$. On conjecture alors qu'une base de cet espace est constituée d'autant d'éléments qu'il y a de tels coefficients :
$$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} 1 = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}.$$
Une matrice antisymétrique M est entièrement décrite par la donnée de ses coefficients m_{ij} pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$. On conjecture alors qu'une base de cet espace est constituée d'autant d'éléments qu'il y a de tels coefficients :
$$\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} 1 = \sum_{j=1}^{n} (j-1) = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Définition 3.2 (Sous-espaces particuliers, cas particuliers)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$.
- Une **droite vectorielle** de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension 1.
- Un **plan vectoriel** de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2.

Proposition 3.3 (Formule de Grassman)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Démonstration. Pour simplifier la preuve, on suppose que $F \cap G$, F et G sont différents de $\{0_E\}$ (la formule est directe si F ou G valent $\{0_E\}$ et le cas $F \cap G = \{0_E\}$ se traite en adaptant la suite de la preuve).
$F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E, donc de dimension finie et $F \cap G \neq \{0_E\}$, donc il existe une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de $F \cap G$. C'est une famille libre de F, on peut donc (par le théorème de la base incomplète) la compléter en une base $(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, fq)$ de F. De même, $(e_1, \ldots, e_p)$ est une famille libre de G, on peut donc la compléter en une base $(e_1, \ldots, e_p, g_1, \ldots, g_r)$ de G. On pose alors :

$$\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q, g_1, \ldots, g_r).$$

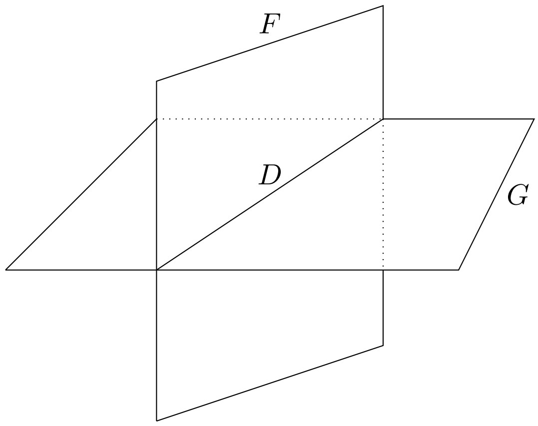
Par juxtaposition de familles génératrices, $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $F+G$. Montrons qu'elle est également libre. Soit $(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q, c_1, \ldots, c_r) \in \mathbb{K}^{p+q+r}$, on pose $A = \sum_{i=1}^{p} a_i e_i$, $B = \sum_{i=1}^{q} b_i f_i$ et $C = \sum_{i=1}^{r} c_i g_i$. Supposons que $A + B + C = 0_E$. Alors :
- On a $C = -B - A$. Or $C \in G$ et $-B - A \in F$, donc $C \in F \cap G$. Comme $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de $F \cap G$, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que :
$$C = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \quad \text{donc} \quad \sum_{i=1}^{r} c_i g_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \quad \text{donc} \quad \sum_{i=1}^{r} c_i g_i - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0_E.$$
Comme $(e_1, \ldots, e_p, g_1, \ldots, g_r)$ est une famille libre (c'est une base de G), les scalaires sont tous nuls, et en particulier $c_1 = \ldots = c_r = 0$.
- De même, $B = -C - A \in F \cap G$, donc $b_1 = \ldots = b_q = 0$.
- Donc $A = 0$. Or $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre, ce qui donne $a_1 = \ldots = a_p = 0$.

Donc $\mathcal{F}$ est libre et c'est une base de $F+G$. On en déduit :

$$\dim(F+G) = p + q + r = (p+q) + (p+r) - p = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

□

Exemple. Considérons deux plans vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$, qui se coupent selon une droite D.



On a bien $\dim(F+G) = 3 = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

3.2 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Proposition 3.4 (Existence d'un supplémentaire en dimension finie)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F admet un sous-espace vectoriel supplémentaire G dans E.

Démonstration. On suppose que $F \neq \{0_E\}$ (sinon, E serait un supplémentaire de F).
Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base de F. Cette famille est libre dans E, donc par le théorème de la base incomplète on peut la compléter en une base $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ de E. Montrons que $G = \text{Vect}((e_{k+1}, \dots, e_n))$ est un supplémentaire de F dans E.

— Il est évident par construction de G que $F+G \subset E$. Par ailleurs, soit $x \in E$. Comme $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ est une base de E, il existe des scalaires λ_1, ..., λ_n tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Or $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \in F$ et $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i \in G$ (par définition de G). Donc $x \in F + G$, et $E \subset F + G$. On en déduit par double inclusion que $E = F + G$.

— Montrons que la somme est directe. Soit $x \in F \cap G$, $x \in F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ donc $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k$ tel que $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$. De même, $x \in G = \text{Vect}((e_{k+1}, \dots, e_n))$ donc $\exists (\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-k}$ tel que $x = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i$.
En soustrayant ces deux égalités, on trouve :

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i - \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E.$$

Comme la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre (c'est une base), on en déduit que tous les λ_i sont nuls. Donc $x = 0_E$, et $F \cap G = \{0_E\}$. Donc $E = F \oplus G$.

$\square$

Exercice 7. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] | P(1) = 0\}$. Déterminer un supplémentaire à F dans $\mathbb{R}_2[X]$.
<u>Solution :</u> On commence par chercher une base de F.
Soit $P \in F$, alors il existe des réels a, b, c tels que $P(X) = aX^2 + bX + c$. Comme $P(1) = 0$, on a $a + b + c = 0$. Donc

$$P(X) = aX^2 + bX - a - b = a(X^2 - 1) + b(X - 1).$$

Comme $X^2 - 1 \in F$ et $X - 1 \in F$, ces deux vecteurs forment une famille génératrice de F. C'est de plus une famille échelonnée en degré, donc libre. Donc $(X^2 - 1, X - 1)$ est une base de F.
Complétons cette base en une base de $\mathbb{R}_2[X]$, par exemple en lui ajoutant un vecteur de la base canonique : 1 (d'autres choix étaient possibles). La famille $(X^2 - 1, X - 1, 1)$ est une famille échelonnée en degrés, donc libre dans $\mathbb{R}_2[X]$. Comme c'est une famille à $3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$ éléments, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Variante : on peut écrire $P \in F$ comme $P(X) = (X - 1)(aX + b)$ si on préfère utiliser une forme factorisée. On obtient alors que $(X(X - 1), X - 1)$ est une base de F. La complétion s'effectue ensuite de la même façon.

On pose $G = \text{Vect}(1)$. La démonstration précédente garantit alors que G est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_2[X]$.
Rédaction à adopter quand on aura vu les résultats de la fin du chapitre : $1 \neq 0$ est une base de G. Juxtaposer une base de F et une base de G donne une base de $\mathbb{R}_2[X]$, donc G est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_2[X]$.

3.3 Caractérisation de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires

Proposition 3.5 (Caractérisation de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E,
2. $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = n$,
3. $E = F + G$ et $\dim(F) + \dim(G) = n$,
4. Si B_1 est une base de F et B_2 est une base de G, la famille B obtenue en juxtaposant les vecteurs de B_1 et B_2 est une base de E. On dit que la base B est **adaptée** à la décomposition en somme directe.

Démonstration. On montre $(1) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow (3) \Longrightarrow (4) \Longrightarrow (1)$.

— Montrons $(1) \Longrightarrow (2)$. On suppose que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Alors $F \cap G = \{0_E\}$ et la formule de Grassman donne : $n = \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) - 0 = \dim(F) + \dim(G)$.

— Montrons $(2) \Longrightarrow (3)$. On suppose que $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = n$. Alors

$$\dim(E) = n = \dim(F) + \dim(G) = \dim(F + G) + 0 = \dim(F + G).$$

Comme $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E, on a donc $E = F + G$.

— Montrons $(3) \Longrightarrow (4)$. On suppose que $E = F + G$ et $\dim(F) + \dim(G) = n$. Soit $B_1 = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F et $B_2 = (g_1, \dots, g_q)$ une base de G (ces bases existent puisqu'on est en dimension finie non nulle). On pose $B = (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$. C'est une famille d'éléments de E, montrons qu'il s'agit d'une base de E. Soit $x \in E$. Comme $E = F + G$, il existe $y \in F$ et $z \in G$ tels que $x = y + z$. Or, puisque B_1 est une base de F et B_2 une base de G, il existe aussi des scalaires $a_1, \dots, a_p$ et $b_1, \dots, b_q$ tels que

$$y = \sum_{i=1}^{p} a_i f_i \text{ et } z = \sum_{i=1}^{q} b_i g_i.$$

On en déduit que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i f_i + \sum_{i=1}^{q} b_i g_i \in \mathrm{Vect}(B)$. Donc B est une famille génératrice de E. Or, elle compte $p + q = n = \dim(E)$ éléments. Donc c'est une base de E.

— Montrons $(4) \Longrightarrow (1)$. Soit $B_1 = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F et $B_2 = (g_1, \dots, g_q)$ une base de G. On suppose que la famille $B = (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base de E. Montrons d'abord que $E = F + G$. Il est immédiat que $F + G \subset E$, il suffit donc de montrer l'inclusion réciproque. Soit $x \in E$. Comme B est une base de E, il existe des scalaires $a_1, \dots, a_p$, $b_1, \dots, b_q$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} a_i f_i + \sum_{i=1}^{q} b_i g_i.$$

Notons $y = \sum_{i=1}^{p} a_i f_i$ et $z = \sum_{i=1}^{q} b_i g_i$. On a alors $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Vect}(B_1) = F$ et $z \in \mathrm{Vect}(B_2) = G$. Donc $x \in F + G$, et $E = F + G$.

Montrons ensuite que $F \cap G = \{0_E\}$. Soit $x \in F \cap G$. Comme $x \in F$, il existe des scalaires $a_1, \dots, a_p$ tels que $x = \sum_{i=1}^{p} a_i f_i$. Et comme $x \in G$, il existe des scalaires $b_1, \dots, b_q$ tels que $x = \sum_{i=1}^{q} b_i g_i$. On a donc

$$\sum_{i=1}^{p} a_i f_i - \sum_{i=1}^{q} b_i g_i = 0_E,$$

et comme B est libre, les scalaires a_i et b_i sont tous nuls. En particulier, $x = 0_E$. D'où le résultat.

Rmq : pour montrer $F \cap G = \{0_E\}$, on pouvait également utiliser la relation $E = F + G$ et la formule de Grassman : $\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G) = p + q - \dim(E) = 0$, d'où $F \cap G = \{0_E\}$.

□