Espaces vectoriels

Cours de É. Bouchet – ECS1

10 octobre 2019

Table des matières

Les espaces vectoriels introduisent un langage commun pour des situations qui apparaissent à priori très différentes (vecteurs, fonctions, polynômes, suites, matrices, ...) et permettent ainsi de résoudre avec la même méthode des problèmes concernant des domaines différents.
Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels

1.1 Définition

Définition (Espace vectoriel)**.**

Soit E un ensemble non vide, muni d'une opération interne notée $+$ définie de $E \times E$ dans E et d'une multiplication externe notée $\cdot$ définie de $\mathbb{K} \times E$ dans E. On dit que $(E, +, \cdot)$ est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{K}$ lorsque :

— L'opération interne $+$ vérifie les propriétés suivantes :
1. pour tout $(x, y) \in E^2$, $x + y = y + x$ (la loi $+$ est *commutative*),
2. pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $(x + y) + z = x + (y + z)$ (la loi $+$ est *associative*),
3. il existe un unique élément $e \in E$, tel que pour tout $x \in E$, $x + e = e + x = x$. L'élément e est alors appelé *élément neutre* de E pour l'opération $+$.
4. pour tout $x \in E$, il existe $x' \in E$ tel que $x + x' = x' + x = e$. Cet élément est unique, appelé *opposé* de x, et noté $-x$.

— L'opération externe $\cdot$ vérifie les propriétés suivantes :
1. pour tout $x \in E$ et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
2. pour tout $(x, y) \in E^2$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
3. pour tout $x \in E$ et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$
4. pour tout $x \in E$, $1 \cdot x = x$

Remarque. On appelle *vecteurs* les éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et *scalaires* les éléments de $\mathbb{K}$.

Démonstration. On va montrer l'unicité de l'élément neutre, et l'unicité de l'opposé.

— Supposons qu'on a deux éléments neutres, e et e'. Alors, comme e et e' sont éléments neutres,

$$e + e' = e' \text{ et } e + e' = e.$$

D'où $e = e'$, et l'unicité de l'élément neutre.

— Supposons que y et y' sont deux opposés d'un vecteur x de E. Alors

$$x + y = x + y' = e.$$

On en déduit successivement :

$$\begin{aligned} y + (x + y) &= y + (x + y') \\ (y + x) + y &= (y + x) + y' \\ e + y &= e + y' \\ y &= y' \end{aligned}$$

□

Exemple 1. Dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$:

— Si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on définit $x + y$ comme $(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in \mathbb{R}^2$. Il s'agit bien d'une opération interne dans $\mathbb{R}^2$, qui vérifie les propriétés :

1. pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,
$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2) = y + x,$$
2. pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$,
$$(x+y)+z = (x_1+y_1, x_2+y_2)+(z_1, z_2) = (x_1+y_1+z_1, x_2+y_2+z_2) = (x_1, x_2)+(y_1+z_1, y_2+z_2) = x+(y+z),$$
3. il existe un élément $e = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $x + e = x = e + x$.
4. pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, il existe $x' = (-x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x + x' = e = x' + x$.

— Si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit $\alpha \cdot x$ comme $(\alpha x_1, \alpha x_2) \in \mathbb{R}^2$. Il s'agit bien d'une multiplication externe, qui vérifie les propriétés :

1. pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,
$$(\alpha + \beta) \cdot x = ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2) = (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\beta x_1, \beta x_2) = \alpha \cdot x + \beta \cdot x,$$
2. pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,
$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\alpha y_1, \alpha y_2) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,$$
3. pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,
$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = \alpha \cdot (\beta x_1, \beta x_2) = (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2) = (\alpha\beta) \cdot x,$$
4. pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $1 \cdot x = (x_1, x_2) = x$.

Donc $(\mathbb{R}^2, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemple 2. L'ensemble des vecteurs de l'espace, muni de l'addition de deux vecteurs et de la multiplication d'un réel par un vecteur, est un espace vectoriel réel.

Remarque. Le symbole de l'opération externe $\cdot$ est parfois omis. Qu'il soit présent ou pas, il faut toujours placer le scalaire à gauche du vecteur.

Remarque. L'élément neutre pour $+$ est souvent noté 0_E, ou 0 lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion.

1.2 Propriétés

Proposition.

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Alors pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$\lambda \cdot x = 0_E \Longleftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E.$$

Démonstration.

— On commence par la réciproque. Pour tout $x \in E$,
$$0x = (0 + 0)x = 0x + 0x,$$
D'où en ajoutant $-0x$ des deux côtés, $0x = 0_E$. De même, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$\lambda 0_E = \lambda(0_E + 0_E) = \lambda 0_E + \lambda 0_E,$$
d'où $\lambda 0_E = 0_E$.

— On montre maintenant le sens direct. Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda x = 0_E$. On suppose que $\lambda \neq 0$. Alors d'une part,

$$\frac{1}{\lambda}\lambda x = \frac{1}{\lambda}0_E = 0_E,$$

et d'autre part :

$$\frac{1}{\lambda}\lambda x = \frac{\lambda}{\lambda}x = 1x = x.$$

D'où $x = 0_E$.

□

1.3 Espaces vectoriels de référence

Les structures suivantes sont des espaces vectoriels à connaître :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Les lois associées sont :
   pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
   $$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \text{ et } \lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$
   L'élément neutre est le n-uplet $(0, \ldots, 0)$.
2. Pour tout $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Les lois associées sont l'addition de deux matrices, et la multiplication d'une matrice par un scalaire, qui seront définies dans le chapitre sur les matrices.
3. L'ensemble des suites réelles (noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Les lois associées sont :
   pour toutes suites u et v et pour tout réel λ, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$(u + v)_n = u_n + v_n \text{ et } (\lambda u)_n = \lambda u_n.$$
   L'élément neutre est la suite nulle.
4. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. L'ensemble des applications de A dans $\mathbb{R}$ (noté $\mathbb{R}^A$) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Les lois associées sont :
   pour toutes applications f et g et pour tout réel λ, pour tout $x \in A$,
   $$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ et } (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$
   L'élément neutre est la fonction nulle.
5. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Les lois associées sont l'addition de deux polynômes, et la multiplication d'un polynôme par un scalaire, qui seront définies dans le chapitre sur les polynômes.

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition et caractérisation

Définition (Sous-espace vectoriel)**.**

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F un sous-ensemble de E. On dit que $(F, +, \cdot)$ est un **sous-espace vectoriel** de $(E, +, \cdot)$ lorsque

1. F est non vide,
2. pour tout $(x, y) \in F^2$, $x + y \in F$,
3. pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et pour tout $x \in F$, $\alpha \cdot x \in F$.

Proposition (Caractérisation d'un sous-espace vectoriel)**.**

Soit $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et F un sous-ensemble de E. Alors $(F,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(E,+,\cdot)$ si et seulement si :

1. F est non vide,
2. pour tout $(x,y) \in F^2$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $(\alpha \cdot x) + y \in F$.

Exemple 3. On note E l'ensemble des suites réelles convergentes. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

— La suite nulle converge (vers 0), donc est dans E, donc l'ensemble E n'est pas vide.

— Soit $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in E^2$, on note ℓ_1 et ℓ_2 leurs limites réelles respectives. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors $(\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, et par propriétés des suites convergentes, elle converge vers la limite $\lambda\ell_1 + \ell_2 \in \mathbb{R}$.
Donc $(\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

Donc E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

Exemple 4. Montrer que l'ensemble E' des fonctions réelles f telles que $f(0) = 0$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

— La fonction nulle est dans E' (car elle vaut 0 en 0), donc l'ensemble E' n'est pas vide.

— Soit $(f,g) \in (E')^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + g$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et on a :

$$(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda 0 + 0 = 0.$$

Donc $\lambda f + g \in E'$.

Donc E' est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2.2 Propriétés

Proposition.

Soit $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Si $(F,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(E,+,\cdot)$ alors $(F,+,\cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Remarque. Il est beaucoup plus rapide de montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu que de montrer directement que F est un espace vectoriel.

Exemple 5. On a donc montré dans les exemples 3 et 4 que l'ensemble des suites convergentes est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et que l'ensemble des fonctions réelles valant 0 en 0 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Proposition.

Soit $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Si $(F,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(E,+,\cdot)$ alors

$$0_E \in F.$$

Démonstration. Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E. Par hypothèse, F est non vide, donc contient un élément x. Comme $0 \in \mathbb{K}$, cela entraîne $0x \in F$, et donc $0_E \in F$. □

Proposition.

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. (démonstration à connaître) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

- Par propriété d'un sous-espace vectoriel, $0_E \in F$ et $0_E \in G$.
  Donc $0_E \in F \cap G$ et $F \cap G$ n'est pas vide.
- Soit $(x, y) \in (F \cap G)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
  Comme $x \in F$, $y \in F$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\lambda x + y \in F$.
  De même, $\lambda x + y \in G$.
  Donc $\lambda x + y \in F \cap G$.

Donc $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Remarque. Attention : de manière générale, la réunion de deux sous-espaces vectoriels de E n'est PAS un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 6. $\{0\} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \{0\}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
Il contient $(0, 1)$ et $(1, 0)$, mais pas leur somme $(1, 1)$.

Remarque. Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ n'admet que deux sous-espaces vectoriels : $\{0\}$ et $\mathbb{R}$.

3 Familles de vecteurs d'un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$

3.1 Combinaison linéaire finie

Définition (Famille finie)**.**

Une **famille finie** d'un espace vectoriel E est la donnée d'un entier naturel non nul p, et d'une liste de p vecteurs de E : $(e_1, e_2, ..., e_p)$.

Remarque. Les éléments d'une famille finie peuvent être distincts ou non, et l'ordre est fixé : une famille n'est pas un ensemble.

Exemple 7. $(1, 0)$, $(0, 1, 3)$ et $(1, 2, 2, 4)$ sont trois familles finies de l'espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Définition (Combinaison linéaire)**.**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{S} = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ une famille finie de p vecteurs de E et $x \in E$. On dit que x est **combinaison linéaire** des vecteurs de $\mathcal{S}$ lorsqu'il existe p scalaires $(\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ de $\mathbb{K}$ tels que :

$$x = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k.$$

Exemple 8. On a :

— $((1,5),(2,3))$ est une famille finie de $\mathbb{R}^2$, et $(4,13)$ est combinaison linéaire de ces vecteurs :
On résout (au brouillon) l'équation $(4,13)=\alpha_1(1,5)+\alpha_2(2,3)$, d'inconnues α_1 et α_2 :

$$\begin{cases} 4 &= \alpha_1+2\alpha_2 \\ 13 &= 5\alpha_1+3\alpha_2 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1=2 \text{ et } \alpha_2=1.$$

Rédaction finale : on remarque que $(4,13)=2(1,5)+(2,3)$, donc $(4,13)$ est combinaison linéaire des vecteurs de $((1,5),(2,3))$.

— $((0,0),(0,1),(0,2))$ est une famille finie de $\mathbb{R}^2$, et $(1,1)$ n'est pas combinaison linéaire de ces vecteurs :
On le montre par l'absurde : supposons que $(1,1)$ soit combinaison linéaire des vecteurs. Alors il existe des scalaires $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ tels que :

$$(1,1)=\alpha_1(0,0)+\alpha_2(0,1)+\alpha_3(0,2) \Longleftrightarrow (1,1)=(0,\alpha_2+2\alpha_3) \Rightarrow 1=0,$$

ce qui est absurde. Donc $(1,1)$ n'est pas combinaison linéaire de ces vecteurs.

3.2 Sous-espace vectoriel engendré par une famille

Proposition (Sous-espace vectoriel engendré)**.**

Soit p un entier naturel non nul, et $\mathcal{S}=(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille finie de p vecteurs de E.
On note $\mathrm{Vect}(\mathcal{S})$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des p vecteurs de $\mathcal{S}$.
$\mathrm{Vect}(\mathcal{S})$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé **sous-espace vectoriel engendré** par la famille $\mathcal{S}$.

Démonstration.

— $0_E=0e_1+0e_2+\cdots+0e_p$, donc $0_E\in\mathrm{Vect}(\mathcal{S})$. L'ensemble n'est donc pas vide.

— Soit x et y deux vecteurs de $\mathrm{Vect}(\mathcal{S})$, et λ un scalaire.
$\exists(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{K}^p$ et $\exists(y_1,\dots,y_p)\in\mathbb{K}^p$ tels que $x=\displaystyle\sum_{i=1}^p x_ie_i$ et $y=\displaystyle\sum_{i=1}^p y_ie_i$. On peut alors écrire :

$$\lambda x+y=\lambda\sum_{i=1}^p x_ie_i+\sum_{i=1}^p y_ie_i=\sum_{i=1}^p(\lambda x_i+y_i)\,e_i\in\mathrm{Vect}(\mathcal{S}).$$

Donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{S})$ est bien un sous-espace vectoriel de E. □

Exemple 9. $\mathrm{Vect}((1,2),(1,0))=\mathbb{R}^2$.
L'inclusion $\mathrm{Vect}((1,2),(1,0))\subset\mathbb{R}^2$ est évidente. Réciproquement, soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$(x,y)=\frac{y}{2}(1,2)+\left(x-\frac{y}{2}\right)(1,0)\in\mathrm{Vect}((1,2),(1,0)),$$

d'où $\mathbb{R}^2\subset\mathrm{Vect}((1,2),(1,0))$. Par double inclusion, on a donc égalité des deux ensembles.

$\mathrm{Vect}((1,2),(3,6))=\mathrm{Vect}((1,2))=\{(\lambda,2\lambda),\lambda\in\mathbb{R}\}$.
Il est direct que $\mathrm{Vect}((1,2))\subset\mathrm{Vect}((1,2),(3,6))$. Réciproquement, soit $(x,y)\in\mathrm{Vect}((1,2),(3,6))$, alors

$$(x,y)=\lambda(1,2)+\mu(3,6)=(\lambda+3\mu)(1,2)\in\mathrm{Vect}((1,2)),$$

d'où $\mathrm{Vect}((1,2),(3,6))\subset\mathrm{Vect}((1,2))$. Par double inclusion, on a donc égalité des deux ensembles.

3.3 Familles génératrices

Définition (Famille génératrice)**.**

Soit E un espace vectoriel. Une famille $\mathcal{S}$ de E est dite **génératrice** de E lorsque $\operatorname{Vect}(\mathcal{S}) = E$.

Remarque. L'inclusion $\operatorname{Vect}(\mathcal{S}) \subset E$ est évidente. Pour prouver que $\mathcal{S}$ est génératrice de E, il suffit donc de montrer que $E \subset \operatorname{Vect}(\mathcal{S})$, c'est-à-dire de montrer que tout $x \in E$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{S}$.

Exemple 10. La famille $((1,0),(1,1))$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$?
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On peut écrire :

$$(x,y) = (x-y)(1,0) + y(1,1);$$

De plus $(1,0)$ et $(1,1)$ sont bien des éléments de $\mathbb{R}^2$. Donc $((1,0),(1,1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 11. Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 2y\}$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

   — $0 = 2 \times 0$, donc $(0,0,0) \in E$ et E n'est pas vide.
   — Soit $a = (x_a, y_a, z_a)$ et $b = (x_b, y_b, z_b)$ deux éléments de E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda a + b = (\lambda x_a + x_b, \lambda y_a + y_b, \lambda z_a + z_b)$, et :

   $$\lambda x_a + x_b = \lambda 2 y_a + 2 y_b = 2(\lambda y_a + y_b),$$

   puisque a et b sont dans E. Donc $\lambda a + b \in E$.

   E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. C'est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Déterminer une famille génératrice de E.
   Soit $(x,y,z) \in E$. Alors $x = 2y$. Donc

   $$(x,y,z) = (2y,y,z) = (2y,y,0) + (0,0,z) = y(2,1,0) + z(0,0,1).$$

   Or $(2,1,0) \in E$ et $(0,0,1) \in E$. Donc $((2,1,0),(0,0,1))$ est une famille génératrice de E.

Proposition.

Toute famille de vecteurs qui contient une famille génératrice de l'espace vectoriel E est une famille génératrice de l'espace vectoriel E.

Démonstration. Soit $\mathcal{S}$ une famille génératrice de E, et soit $\mathcal{S}'$ une famille de vecteurs qui contient les vecteurs de $\mathcal{S}$. Soit $x \in E$. Comme $\mathcal{S}$ est génératrice de E, x peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{S}$, qui sont aussi des vecteurs de $\mathcal{S}'$. Donc x peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{S}'$.
Ceci étant vrai pour tout x de E, $\mathcal{S}'$ est génératrice de E. $\square$

Proposition.

Soit E un espace vectoriel et $p \geqslant 2$. Si $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une famille génératrice de E et si e_p peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2, $\ldots$, e_{p-1}, alors $(e_1, e_2, \ldots, e_{p-1})$ est une famille génératrice de E.

Démonstration. (démonstration à connaître) Soit $x \in E$. Alors $\exists (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que $x = \sum_{k=1}^{p} x_k e_k$.
De plus, e_p peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2, …, e_{p-1}, donc $\exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^{p-1}$ tels que $e_p = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k e_k$. On a donc :

$$x = \sum_{k=1}^{p-1} (x_k + \alpha_k) e_k.$$

Donc x peut s'écrire comme combinaison linéaire de $(e_1, e_2, \dots, e_{p-1})$, ce qui termine la preuve. □

3.4 Familles libres

Définition (Famille libre)**.**

Une famille $(e_1, e_2, ..., e_p)$ de l'espace vectoriel E est dite **libre** lorsque pour tout p-uplet $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ de scalaires de $\mathbb{K}^p$,

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k = 0_E \Longrightarrow \forall k \in [\![1, p]\!], \quad \alpha_k = 0.$$

On dit alors que les vecteurs e_1, e_2, …, e_p sont **linéairement indépendants**. Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Remarque. En pratique, pour montrer qu'une famille est libre, on fixe $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{K}^p$, on suppose que $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k = 0_E$ et on cherche à montrer que tous les α_i sont nuls.

Exemple 12. Montrer que $((1, 0), (1, 1))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $\lambda(1, 0) + \mu(1, 1) = (0, 0)$. Alors $(\lambda + \mu, \mu) = (0, 0)$, ce qui donne $\mu = 0$ puis $\lambda = 0$. Donc $((1, 0), (1, 1))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 13. Montrer que $((1, 2), (3, 6))$ est une famille liée.
On peut écrire $-3 \cdot (1, 2) + 1 \cdot (3, 6) = (0, 0)$, alors que ni -3 ni 1 ne sont nuls, la famille est donc liée.

Exemple 14. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{2x}$. La famille (f, g) est-elle libre dans l'espace vectoriel des fonctions réelles ?
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Supposons que $\lambda f + \mu g = 0$, où 0 représente ici la fonction nulle. Alors pour tout x réel, $\lambda e^x + \mu e^{2x} = 0$.
Cette égalité est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations sur des fonctions dérivables, et on trouve pour tout réel x,

$$\lambda e^x + 2\mu e^{2x} = 0.$$

En soustrayant ces deux égalités, on trouve $\mu = 0$.
On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda e^x = 0$ et donc $\lambda = 0$. La famille est donc libre.
VARIANTE : Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Supposons que $\lambda f + \mu g = 0$. Alors pour tout x réel, $\lambda e^x + \mu e^{2x} = 0$. En particulier, on peut diviser par $e^x > 0$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda + \mu e^x = 0$.
En prenant la limite pour $x \to -\infty$, on obtient $\lambda = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mu e^x = 0$.
La valeur en $x = 0$ donne $\mu = 0$. On a montré que $\lambda = \mu = 0$, la famille est donc libre.

Proposition.

Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Démonstration. (démonstration à connaître) On va montrer que si on enlève un élément à une famille libre, la nouvelle famille obtenue reste libre. Le résultat général se montre ensuite par récurrence décroissante. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une famille libre, montrons que $(e_1, e_2, \ldots, e_{p-1})$ l'est aussi : soit α_1, …, α_{p-1} des scalaires, on suppose que :

$$\sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k e_k = 0_E.$$

Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k e_k + 0 \cdot e_p = 0_E$. Comme la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est libre, alors pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $\alpha_k = 0$. Donc $(e_1, e_2, \ldots, e_{p-1})$ est une famille libre. □

Proposition.

Soit E un espace vectoriel. Une famille $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ de E est libre si et seulement si pour tous scalaires α_1, α_2, …, α_p, β_1, β_2, …, β_p de $\mathbb{K}$,

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k = \sum_{j=1}^{p} \beta_j e_j \Longrightarrow \forall m \in [\![1, p]\!], \quad \alpha_m = \beta_m.$$

Démonstration. Cela découle directement de l'équivalence suivante :

$$\left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k = \sum_{j=1}^{p} \beta_j e_j \Longrightarrow \forall m \in [\![1, p]\!], \quad \alpha_m = \beta_m\right)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\left(\sum_{k=1}^{p} (\alpha_k - \beta_k) e_k = 0 \Longrightarrow \forall m \in [\![1, p]\!], \quad (\alpha_m - \beta_m) = 0\right)$$

□

Proposition.

Soit E un espace vectoriel. Une famille $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ de E est liée si et seulement si l'un des vecteurs de cette famille peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Remarque. En particulier toute famille dont l'un des vecteurs est nul est liée, car si $e_1 = 0_E$, $e_1 = 0e_2 + \cdots + 0e_p$.

Démonstration. On fait la preuve en deux temps :

— Supposons que $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est liée. Alors, il existe $(\alpha_i)_{i \in [\![1,p]\!]} \in \mathbb{K}^p$ et $j \in [\![1, p]\!]$ tels que $\alpha_j \neq 0$ et :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i = 0_E.$$

On peut donc écrire $\displaystyle e_j = -\sum_{i=1}^{j-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} e_i - \sum_{i=j+1}^{p} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} e_i.$

— Réciproquement, on suppose qu'il existe $j \in [\![1, p]\!]$ et $(\beta_i)_{i \in [\![1,j-1]\!] \cup [\![j+1,p]\!]} \in \mathbb{K}^{p-1}$ tels que

$$e_j = \sum_{i=1}^{j-1} \beta_i e_i + \sum_{i=j+1}^{p} \beta_i e_i.$$

En posant $\beta_j = -1 \neq 0$, on trouve alors $\sum_{i=1}^{p} \beta_i e_i = 0_E$, où les β_i ne sont pas tous nuls. La famille est donc liée.

$\square$

Remarque. Quelques cas particuliers :

1. Si $e \in E$ et $e \neq 0_E$, alors la famille (e) est libre.
2. Une famille (e_1, e_2) est liée si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires.

Exemple 15. La famille $((0,1,2),(0,2,1),(0,1,1))$ est-elle libre ?
On cherche à montrer que la famille est libre. Soit λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels, on suppose que :

$$\lambda_1(0,1,2) + \lambda_2(0,2,1) + \lambda_3(0,1,1) = (0,0,0).$$

On aurait alors :

$$(0, \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0).$$

Et donc

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = \lambda_2 \\ \lambda_3 & = -3\lambda_2 \end{cases}$$

On peut donc conclure que $(0,1,1) = \frac{1}{3}(0,1,2) + \frac{1}{3}(0,2,1)$, et la famille était en fait liée.

3.5 Bases de E

Définition (Base)**.**

Une famille $S = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une **base** de l'espace vectoriel E lorsque tout vecteur de E peut s'écrire d'une manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2, …, e_p.

Proposition.

Une famille $\mathcal{S} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une base de l'espace vectoriel E si et seulement si $\mathcal{S}$ est une famille libre et génératrice de E.

Exemple 16. Dans $\mathbb{K}^n$, on pose $e_1 = (1,0,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0)$, …, $e_k = (0,\dots,0,\underbrace{1}_{k\text{ème position}},0,\dots,0)$, …, $e_n = (0,\dots,0,1)$. Montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ forme une base de $\mathbb{K}^n$.
On l'appelle *base canonique* de $\mathbb{K}^n$.

— Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On a alors :

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_i e_i.$$

Or $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $e_i \in \mathbb{K}^n$. La famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est donc génératrice de $\mathbb{K}^n$.

— Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$. On suppose que :

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_i e_i = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

Alors $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0, 0, \dots, 0)$, et par identification des coefficients les α_i sont tous nuls. La famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est donc libre.

— La famille est libre et génératrice, c'est donc une base de $\mathbb{K}^n$.

Exemple 17. Soit E l'ensemble des suites réelles qui vérifient la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. En déterminer une base.

1. On montre que c'est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles :
   — La suite nulle vérifie la relation de récurrence proposée, donc E est non vide.
   — Soit u et v deux suites de E, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned}(\lambda u + v)_{n+2} &= \lambda u_{n+2} + v_{n+2} \\ &\overset{(u,v)\in E^2}{=} \lambda(u_{n+1} + u_n) + v_{n+1} + v_n \\ &= (\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + (\lambda u_n + v_n) \\ &= (\lambda u + v)_{n+1} + (\lambda u + v)_n.\end{aligned}$$

   Donc $\lambda u + v \in E$.

   E est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles, c'est donc un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. — Soit $u \in E$, c'est une suite récurrente linéaire d'ordre deux, d'équation caractéristique $q^2 = q + 1$, dont les solutions sont :

$$q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

   D'après le cours sur les suites réelles, il existe donc deux réels α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n.$$

   Or $\forall n \in N$, $q_1^n + q_1^{n+1} = q_1^n(1 + q_1) = q_1^n q_1^2 = q_1^{n+2}$ (car q_1 est solution de l'équation caractéristique, donc $q_1^2 = q_1 + 1$). Donc $(q_1^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

   On montre de même que $(q_2^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. Donc $((q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (q_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une famille génératrice de E.

   — Soit λ et μ deux réels, on suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda q_1^n + \mu q_2^n = 0$. On trouve en particulier pour $n = 0$ et $n = 1$ que $\lambda + \mu = 0$ et $\lambda q_1 + \mu q_2 = 0$. Donc $\lambda = -\mu$ et $\mu\,(q_2 - q_1) = 0$. Cela donne $\lambda = \mu = 0$. Donc $((q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (q_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une famille libre de E.

   — Conclusion : $((q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (q_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une base de E.