Étude asymptotique des suites

Cours de É. Bouchet – ECS1

11 mars 2019

Table des matières

1 Suites équivalentes

1.1 Définition

Définition (Suites équivalentes)**.**

Soient u et v deux suites. On dit que u et v sont **équivalentes** lorsqu'il existe une suite φ et un entier n_0 tels que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = v_n \varphi_n$ et que $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n = 1$. On note alors $u_n \sim v_n$.

Proposition.

Soit u et v deux suites. Si v ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors

$$u \text{ et } v \text{ sont équivalentes} \iff \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Démonstration. (démonstration à connaître) Par hypothèse, il existe un entier n_1 tel que $\forall n \geqslant n_1$, $v_n \neq 0$.

— Si u est équivalente à v, il existe un entier n_0 et une suite φ qui converge vers 1 tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = v_n \varphi_n$. Donc pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on obtient $\frac{u_n}{v_n} = \varphi_n$, ce qui donne :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \varphi_n = 1.$$

— Réciproquement, si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, on pose pour $n \geqslant n_1$: $\varphi_n = \frac{u_n}{v_n}$. Par construction, $\forall n \geqslant n_1$, $u_n = v_n \varphi_n$, et

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Donc u et v sont équivalentes.

□

Exemple 1. Donner un équivalent des suites de terme général $\dfrac{2n^2 - n + 6}{3n^3 - 1}$ et $\dfrac{(1-n)(n+6)}{(n+1)(n+2)(2n+3)}$.

$\dfrac{2n^2 - n + 6}{3n^3 - 1} \sim \dfrac{2}{3n}$. En effet,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2 - n + 6}{3n^3 - 1} \times \frac{3n}{2} \right) = 1.$$

$\dfrac{(1-n)(n+6)}{(n+1)(n+2)(2n+3)} \sim -\dfrac{1}{2n}$. En effet,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1-n)(n+6)}{(n+1)(n+2)(2n+3)}(-2n) = 1.$$

1.2 Propriétés des suites équivalentes

Proposition (Transitivité des équivalents)**.**

Soit u, v et w trois suites. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$.

Démonstration. On suppose que $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$. Il existe alors deux suites φ et ψ qui convergent vers 1 et un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = v_n\varphi_n$ et $v_n = w_n\psi_n$. Alors $\forall n \geqslant n_0$,

$$u_n = (\varphi_n\psi_n)w_n,$$

et $(\varphi_n\psi_n)$ converge vers 1 par produit. Donc $u_n \sim w_n$. □

Proposition (Équivalents et limites)**.**

Soit u et v deux suites.

- Si u converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $u_n \sim \ell$.
- Si $u_n \sim v_n$ et si v converge, alors u converge également et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Démonstration.

- Si u converge vers $\ell \neq 0$, alors $(\frac{u_n}{\ell})$ converge vers 1 et donc $u_n \sim \ell$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors existe une suite φ qui converge vers 1 et un entier n_0 tels que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = v_n\varphi_n$. On suppose que v converge vers un réel ℓ. Alors par limite d'un produit, u converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \times 1 = \ell$.

□

Proposition (Équivalents et signe de la suite)**.**

Soit u et v deux suites.

- $u_n \sim 0 \iff u_n = 0$ à partir d'un certain rang.
- Si $u_n \sim v_n$ et si v s'annule, alors u s'annule aussi.
- Si $u_n \sim v_n$ et si v est de signe constant, alors u l'est également et est de même signe que v.

Démonstration. Si $u_n \sim v_n$, il existe une suite φ qui converge vers 1 et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = \varphi_n v_n$. Avec ces notations,

- Si $u_n \sim 0$ (cas $v_n = 0$), alors $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = \varphi_n \times 0 = 0$. Réciproquement, s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = 0$, alors $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = 1 \times 0$. Comme $\lim_{n\to+\infty} 1 = 1$, alors $u_n \sim 0$.
- Si v s'annule au rang $n_1 \geqslant n_0$, alors
$$u_{n_1} = \varphi_{n_1} v_{n_1} = \varphi_{n_1} 0 = 0.$$
- On suppose que v est de signe constant. La suite φ converge vers 1, donc est à termes positifs à partir d'un certain rang n_1. Donc $\forall n \geqslant \max(n_0, n_1)$, $u_n = v_n\varphi_n$ est du signe de v_n.

□

Proposition (Produit et quotient d'équivalents)**.**

Soit u, v, w et t quatre suites. Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$, alors $u_n w_n \sim v_n t_n$.
Si de plus w ne s'annule pas, alors $\dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{t_n}$.

Remarque. Il est inutile de vérifier que t ne s'annule pas pour appliquer le résultat : si w ne s'annule pas, alors t ne s'annule pas non plus.

Proposition (Équivalents et passage à la puissance).

Soit u et v deux suites, et α un réel. Si $u_n \sim v_n$ et si u_n^α est bien défini, alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.

Remarque. Ce résultat est en particulier vrai pour toutes les suites si $\alpha \in \mathbb{N}$, pour toutes les suites ne s'annulant pas si $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ et pour toutes les suites strictement positives si $\alpha \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Les deux derniers résultats se démontrent simplement en revenant à la définition des équivalents. □

Remarque. ATTENTION ! Toute autre opération sur les équivalents est interdite, notamment la composition à gauche et la somme.

1.3 Équivalents usuels

Proposition (Équivalents usuels).

Soit u une suite convergeant vers 0 et α un réel non nul fixé. Alors :

$$\ln(1+u_n) \sim u_n, \qquad e^{u_n} - 1 \sim u_n, \qquad (1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n, \qquad \sin u_n \sim u_n, \qquad \cos(u_n) - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}.$$

Démonstration. (démonstration à connaître) Les résultats découlent de la dérivabilité des fonctions considérées, et de la valeur du taux d'accroissement en 0 (sauf dans le cas du cosinus). On effectue ici la démonstration dans le cas où u ne s'annule pas à partir d'un certain rang, le cas général sera traité plus tard dans l'année.

— Par exemple : si $f(x) = \ln(1+x)$, alors f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x-0} = f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Comme u converge vers 0, on trouve par composition de limites :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+u_n)}{u_n} = 1,$$

ce qui montre $\ln(u_n+1) \sim u_n$.

— Pour l'équivalent du cosinus, on commence par utiliser la formule de duplication $\cos(u_n) - 1 = -2\sin\left(\frac{u_n}{2}\right)^2$, et comme $\frac{u_n}{2}$ converge vers 0, on peut appliquer l'équivalent du sinus : $\sin\left(\frac{u_n}{2}\right) \sim \frac{u_n}{2}$. Par passage au carré (autorisé car c'est une puissance) et produit par un scalaire,

$$\cos(u_n) - 1 = -2\sin\left(\frac{u_n}{2}\right)^2 \sim -2\left(\frac{u_n}{2}\right)^2 \sim -\frac{u_n^2}{2}.$$

□

Exemple 2. Calculer la limite de la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (que l'on n'avait pas su étudier dans le chapitre sur les suites).
On ne peut pas utiliser $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ car α ne peut pas dépendre de n. On passe alors sous forme exponentielle :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$

On est donc ramenés à étudier la limite de $n\ln(1+\frac{1}{n})$. Comme $\frac{1}{n}$ converge vers 0, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ et on trouve par produit avec n :

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim n\frac{1}{n} = 1.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$ et par composition de limite avec l'exponentielle (continue en 1), $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^1 = e$.

Exemple 3. Calculer la limite de la suite définie pour $n \geqslant 3$ par $u_n = \left(1-\frac{2}{n}\right)^{3n}$.

Comme pour l'exemple précédent, on passe sous forme exponentielle :

$$\forall n \geqslant 3, \quad \left(1-\frac{2}{n}\right)^{3n} = \exp\left(3n\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)\right).$$

On est donc ramenés à étudier la limite de $3n\ln(1-\frac{2}{n})$. Comme $-\frac{2}{n}$ converge vers 0 et par produit d'équivalents :

$$3n\ln\left(1-\frac{2}{n}\right) \sim 3n\left(\frac{-2}{n}\right) = -6.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n\ln\left(1-\frac{2}{n}\right) = -6$ et par composition de limite avec l'exponentielle (continue en -6), $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^{-6}$.

Proposition (Équivalent des coefficients binomiaux)**.**

Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$.

Remarque. Attention, cette relation est vraie pour un entier k fixé, donc k ne peut pas dépendre de n.

Démonstration. On écrit :

$$\forall n \geqslant k, \quad \binom{n}{k} = \frac{1}{k!}n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$$

Or $n \sim n-1$, $n \sim n-2$, …, $n \sim n-k+1$. Donc par produit d'équivalents, $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) \sim n^k$. Il suffit alors de diviser par $k!$ pour obtenir le résultat annoncé. □

Exemple 4. Soit $p \in]0,1[$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles, avec $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{p}{n}\right)$. Soit $k \in \mathbb{N}$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k)$.

$$\forall n \geqslant k, \quad P(X_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{p}{n}\right)^k\left(1-\frac{p}{n}\right)^{n-k} \sim \frac{n^k}{k!}\frac{p^k}{n^k}\left(1-\frac{p}{n}\right)^{n-k} = \frac{p^k}{k!}\exp\left((n-k)\ln\left(1-\frac{p}{n}\right)\right).$$

Or $\frac{p}{n}$ converge vers 0, donc $(n-k)\ln\left(1-\frac{p}{n}\right) \sim (n-k)\left(-\frac{p}{n}\right) \sim -p$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-k)\ln\left(1-\frac{p}{n}\right) = -p$ et on trouve en composant par l'exponentielle (continue en $-p$) puis par produit :

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \frac{p^k e^{-p}}{k!}.$$

2 Suites négligeables

2.1 Définition

Définition (Suites négligeables)**.**

Soient u et v deux suites. On dit que u est **négligeable** devant v lorsqu'il existe une suite ε et un entier n_0 tels que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = v_n \varepsilon_n$ et que $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. On note alors $u_n = o(v_n)$.

Remarque. On prononce "u_n est un petit o de v_n".

Proposition.

Soit u et v deux suites. On suppose que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors :

$$u \text{ est négligeable devant } v \iff \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Démonstration. Par hypothèse, il existe un entier n_1 tel que $\forall n \geqslant n_1$, $v_n \neq 0$.

— Si u est négligeable devant v, il existe un entier n_0 et une suite ε qui converge vers 0 tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = v_n \varepsilon_n$. Donc pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on obtient $\frac{u_n}{v_n} = \varepsilon_n$, ce qui donne :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

— Réciproquement, si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, on pose pour $n \geqslant n_1$: $\varepsilon_n = \frac{u_n}{v_n}$. Par construction, $\forall n \geqslant n_1$, $u_n = v_n \varepsilon_n$, et

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Donc u est négligeable devant v.

□

2.2 Relation entre équivalence et négligeabilité

Proposition.

Soit u et v deux suites. Alors $u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$.

Démonstration. (démonstration à connaître)

— Supposons que $u_n \sim v_n$. Alors il existe une suite φ qui converge vers 1 et un entier n_0 tels que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = v_n \varphi_n$. Et donc $\forall n \geqslant n_0$,

$$u_n - v_n = v_n(\varphi_n - 1),$$

où $(\varphi_n - 1)$ converge vers 0. D'où la négligeabilité.

— Supposons que $u_n - v_n = o(v_n)$. Alors il existe une suite ε qui converge vers 0 et un entier n_0 tels que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n - v_n = \varepsilon_n v_n$. Et donc $\forall n \geqslant n_0$,

$$u_n = v_n(1 + \varepsilon_n),$$

où $(\varepsilon_n + 1)$ converge vers 1. D'où l'équivalence.

□

2.3 Propriétés

Proposition (Somme et produit de suites négligeables)**.**

Soit u, v et w trois suites et λ un réel. Alors :
- Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $\lambda u_n + v_n = o(w_n)$.
- Si $u_n = o(w_n)$ alors $u_n v_n = o(w_n v_n)$.

Démonstration.
- On suppose que $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$. Il existe donc deux suites φ et ψ convergeant vers 0 et un entier n_0 tels que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = \varphi_n w_n$ et $v_n = \psi_n w_n$. On a donc $\forall n \geqslant n_0$,
$$\lambda u_n + v_n = (\lambda \varphi_n + \psi_n) w_n,$$
avec $\lambda\varphi + \psi$ qui converge vers 0. Donc $\lambda u_n + v_n = o(w_n)$.
- On suppose que $u_n = o(w_n)$. Il existe donc une suite φ convergeant vers 0 et un entier n_0 tels que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = \varphi_n w_n$. D'où $\forall n \geqslant n_0$,
$$u_n v_n = \varphi_n w_n v_n,$$
avec φ qui converge toujours vers 0. Donc $u_n v_n = o(w_n v_n)$.

□

Proposition (Suites négligeables et passage à la puissance)**.**

Soit u et v deux suites et $\alpha > 0$. Si $u_n = o(v_n)$ et si u_n^α et v_n^α sont bien définis, alors $u_n^\alpha = o(v_n^\alpha)$.

Remarque. Ce résultat est en particulier vrai pour toutes les suites si $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et pour toutes les suites strictement positives si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Proposition (Suites négligeables et équivalents)**.**

Soit u, v et w trois suites. Si $u_n = o(v_n)$ et si $v_n \sim w_n$, alors $u_n = o(w_n)$.

Proposition (Transitivité des suites négligeables)**.**

Soit u, v et w trois suites. Si $u_n = o(v_n)$ et si $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.

Proposition (Suite négligeable devant 1)**.**

Soit u une suite. Si $u_n = o(1)$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Démonstration. Tous ces résultats se démontrent simplement en revenant à la définition de la négligeabilité. □

Exemple 5. Soit (u_n) une suite qui vérifie :

$$u_n = -2 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Déterminer les limites de (u_n), $((u_n+2)n)$ et $\left(\left(u_n + 2 - \frac{3}{n}\right) n^2\right)$.
On sait que $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge vers 0, donc par somme de limites u converge vers -2. De même,

$$(u_n+2)n = 3 + \frac{4}{\ln n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \to 3.$$

Et par croissances comparées :

$$\left(u_n + 2 - \frac{3}{n}\right) n^2 = \frac{4n}{\ln n} + o\left(1\right) \to +\infty.$$

Exemple 6. On suppose que $u_n = 2 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + o(1)$. Simplifier au maximum cette expression.
On commence par gérer les petits o : $\frac{\frac{1}{n^2}}{1}$ converge vers 0, donc $\frac{1}{n^2} = o(1)$ et $u_n = 2 + \frac{1}{n} + o(1)$. On remarque ensuite que $\frac{1}{n} = o(1)$, donc $u_n = 2 + o(1)$.

2.4 Exemples de référence

Proposition.

On a :

$$\begin{aligned}
n^\alpha &= o(n^\beta) && \text{lorsque } \alpha < \beta,\\
(\ln n)^\beta &= o(n^\alpha) && \text{lorsque } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0,\\
n^\alpha &= o(a^n) && \text{lorsque } \alpha > 0 \text{ et } a > 1,\\
a^n &= o(b^n) && \text{lorsque } |a| < |b|,\\
a^n &= o(n!) && \text{lorsque } a \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

De manière générale, on peut se servir de toutes les croissances comparées pour l'étude asymptotique d'une suite. On les rappelle ci-dessous (dans un produit, le comportement de la colonne de plus faible numéro l'emporte) :

1	2	3	4
$\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$	$q>1,\ \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ $0<q<1,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{q^n} = +\infty$	$a>0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^a = +\infty$	$b>0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} (\ln n)^b = +\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$	$\lvert q\rvert>1,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{q^n} = 0$ $\lvert q\rvert<1,\ \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$	$a<0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^a = 0$	$b<0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} (\ln n)^b = 0$

Le corollaire suivant est en particulier très utile :

Corollaire.

Pour tout réel $\alpha > 0$ et pour tout réel $q \in]-1,1[$, $q^n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

Démonstration. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{q^n}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim\limits_{n\to+\infty} q^n n^\alpha = 0$ par croissances comparées, d'où le résultat. □