Étude de suites

Cours de É. Bouchet – PCSI

22 novembre 2023

Table des matières

1 Généralités sur les suites réelles **2**
- 1.1 Un peu de vocabulaire . . . 2
- 1.2 Modes de définition d'une suite . . . 2

2 Limite d'une suite **3**
- 2.1 Convergence, divergence . . . 3
- 2.2 Opérations sur les limites . . . 4
- 2.3 Passage à la limite et relations d'ordre . . . 5

3 Cas des suites monotones **6**
- 3.1 Théorème de convergence . . . 6
- 3.2 Suites adjacentes . . . 7
- 3.3 Approximations décimales d'un réel . . . 7

4 Suites extraites **8**

5 Suites à valeurs complexes **9**

6 Quelques suites particulières **10**
- 6.1 Suites arithmético-géométriques . . . 10
- 6.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 . . . 11
- 6.3 Suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ . . . 12

1 Généralités sur les suites réelles

1.1 Un peu de vocabulaire

Définition 1.1 (Suite réelle)

On appelle **suite réelle** toute fonction u définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, que l'on note aussi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
Si $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le n-ième terme de la suite u. On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs réelles.

Remarque. Ce chapitre étudie les suites définies sur $\mathbb{N}$, mais cette définition et les propriétés qui suivront se généralisent sans difficultés à $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, ...

Définition 1.2 (Suite majorée, minorée, bornée)

Soit u une suite réelle. On dit que :
- u est **majorée** quand $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.
- u est **minorée** quand $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$.
- u est **bornée** quand u est à la fois majorée et minorée.

Remarque. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Définition 1.3 (Suite croissante, décroissante, monotone, stationnaire)

Soit u une suite réelle. On dit que :
- u est **croissante** quand $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- u est **décroissante** quand $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- u est **monotone** quand u est croissante ou décroissante.
- u est **stationnaire** quand $\exists (n_0, a) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}$ tels que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = a$.

Remarque. Quand les inégalités sont strictes, on dit que u est strictement croissante, strictement décroissante ou strictement monotone.

Remarque. Une suite est stationnaire quand elle est constante à partir d'un certain rang.

Remarque. Pour étudier la monotonie d'une suite, on utilise souvent l'une des deux méthodes suivantes :
- Pour $n \in \mathbb{N}$, étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, comparer pour $n \in \mathbb{N}$ les valeurs $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

Exercice 1. Soit la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n!$. Montrer de deux manières différentes qu'elle est croissante.
Solution :
- Méthode 1 : soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (n+1)! - n! = n!(n+1-1) = n \times n! \geqslant 0$. Donc u est une suite croissante.
- Méthode 2 : on remarque que u est bien à valeurs strictement positives. Soit $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \geqslant 1$. Donc u est une suite croissante.

1.2 Modes de définition d'une suite

Définition 1.4 (Suite définie de manière explicite)

Une suite u est **définie de manière explicite** quand il existe une fonction f à valeurs réelles telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

Remarque. C'est le cas le plus simple à étudier : les calculs des termes se font rapidement, et les propriétés de la fonction f (monotonie, positivité, bornes...) se répercutent directement sur la suite (puisque la suite est la restriction de f à $\mathbb{N}$).

Exemple. La suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$.

Définition 1.5 (Suite définie par récurrence)

Une suite u est **définie par récurrence** quand on donne son premier terme u_0 et une relation de récurrence de type $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ (avec f une fonction réelle).

Remarque. Ce cas est plus compliqué : pour calculer u_n, on a besoin d'avoir calculé avant u_0, u_1, …, u_{n-1}. De plus, les propriétés de f **ne se répercutent pas** sur u.

Exemple. On définit la suite u par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$.
La fonction $x \to x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et pourtant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$, donc la suite u est décroissante.

Définition 1.6 (Suite définie de manière implicite)

Une suite u est **définie de manière implicite** quand pour $n \in \mathbb{N}$, le terme u_n est défini comme la solution d'une équation qui dépend de n.

Remarque. Les suites implicites seront étudiées dans le chapitre « Limites et continuité », on les utilise souvent quand on sait que l'équation admet une unique solution, mais qu'on ne sait pas la calculer.

Remarque. Une même suite peut être définie de plusieurs manières différentes suivant la façon dont l'exercice veut la présenter. Par exemple, la suite u définie de manière explicite par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$ est aussi définie :
- Par récurrence, avec la valeur initiale $u_0 = 1$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$.
- De manière implicite, en remarquant que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est l'unique solution réelle de l'équation $x - 2^n = 0$.

2 Limite d'une suite

2.1 Convergence, divergence

Définition 2.1 (Convergence d'une suite vers un réel)

Soit ℓ un nombre réel. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers ℓ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant n_0, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Exemple. Faire un dessin de suite convergente, avec $n \in \mathbb{N}$ en abscisses et u_n en ordonnée.

Remarque. On utilise l'une des notations $\lim u_n = \ell$ ou $u_n \longrightarrow \ell$. En cas d'ambiguïté, on peut préciser la variable dont on prend la limite avec l'écriture $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Remarque. Les premiers termes de la suite n'ont donc aucune influence sur la valeur de son éventuelle limite.

Remarque. Plus on choisit ε petit, plus n_0 devra être grand pour compenser.

Définition 2.2 (Divergence d'une suite vers l'infini)

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge vers** $+\infty$ lorsque : $\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant A$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge vers** $-\infty$ lorsque : $\forall A < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant A$.

Remarque. On note alors $\lim u_n = \pm\infty$ ou $u_n \longrightarrow \pm\infty$.

Remarque. On peut rencontrer trois types de cas différents en étudiant une limite :

1. La limite existe et est finie : la suite converge vers cette limite (il faut montrer l'existence *ET* trouver la valeur de la limite).
2. La limite existe mais n'est pas finie ($\pm\infty$) : la suite diverge vers cette limite.
3. La limite n'existe pas : la suite diverge (par absence de limite).

Proposition 2.3 (Unicité de la limite)

Lorsque la limite de la suite u existe, elle est unique.

Démonstration. On raisonne par l'absurde : supposons que la suite u possède deux limites distinctes ℓ et ℓ'. Soit $\varepsilon = \frac{|\ell-\ell'|}{3} > 0$. Par définition de la limite, on peut trouver des entiers n_0 et n_1 tels que :

$$\forall n \geqslant n_0, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant n_1, \left|u_n - \ell'\right| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $n \geqslant \max(n_0, n_1)$. On obtient par inégalité triangulaire :

$$\left|\ell - \ell'\right| = \left|\ell - u_n + u_n - \ell'\right| \leqslant |\ell - u_n| + \left|u_n - \ell'\right| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}\left|\ell - \ell'\right|.$$

Cette dernière inégalité est absurde. D'où l'unicité de la limite. □

Proposition 2.4 (Convergence et bornes)

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Soit u une suite qui converge vers un réel ℓ. On fixe $\varepsilon = 1 > 0$. Par définition de la limite, il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant 1$. Donc $\forall n \geqslant n_0$, $\ell - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell + 1$.
Soit un entier $n \in \mathbb{N}$ quelconque, on a donc (faire un dessin) :

$$\min(u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1}, \ell - 1) \leqslant u_n \leqslant \max(u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1}, \ell + 1).$$

Le maximum ou minimum d'un nombre fini de termes existant toujours, cela termine la preuve : la suite est bornée. □

Remarque. La réciproque est fausse : $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (par -1 et 1) et diverge.

2.2 Opérations sur les limites

Limite de la somme de deux suites u et v dans le cas où u et v admettent des limites :

Somme	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell'$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

Limite du produit de deux suites u et v dans le cas où u et v admettent des limites :

Produit	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell > 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell < 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell' > 0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell' < 0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$	0	0	0	F.I.	F.I.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$

Limite de l'inverse $\frac{1}{u}$ dans le cas où u ne s'annule pas et admet une limite :

Inverse	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \neq 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0+$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0-$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

Les limites de quotients se déduisent directement des règles de produit et de passage à l'inverse.

2.3 Passage à la limite et relations d'ordre

Proposition 2.5 (Cas d'une limite strictement positive)

Soit u une suite qui converge vers un réel $\ell > 0$. Alors à partir d'un certain rang $u_n > 0$.

Démonstration. On pose $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$. Par définition de la limite, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ et donc $\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$. En particulier, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} > 0$, d'où le résultat annoncé. □

Proposition 2.6 (Passage à la limite dans une relation d'ordre)

Soient u et v deux suites convergentes, vérifiant à partir d'un certain rang l'inégalité $u_n \leqslant v_n$. On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Démonstration. On raisonne par l'absurde : supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
La suite $u-v$ converge alors vers $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \lim\limits_{n\to+\infty} v_n > 0$. D'après le résultat précédent, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n - v_n > 0$. C'est en contradiction avec l'hypothèse de l'énoncé. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. □

Remarque. Attention, ces résultats ne s'appliquent que si on sait déjà que les limites existent.

Remarque. Attention, ce résultat ne se généralise pas aux inégalités strictes : $u_n < v_n \not\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
Par exemple, $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs strictement positives, mais ça n'empêche pas sa limite d'être nulle.

Proposition 2.7 (Théorème d'encadrement)

Soient u, v et w trois suites réelles telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Si u et w convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ alors v converge vers ℓ.

Remarque. Ce théorème donne **à la fois l'existence et la valeur** de la limite.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. D'après les hypothèses, il existe des entiers n_0, n_1 et n_2 tels que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n, \qquad \forall n \geqslant n_1, \quad u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon], \qquad \forall n \geqslant n_2, \quad w_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$$

On pose $n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$. Pour $n \geqslant n_3$, on obtient $\ell - \varepsilon < u_n \leqslant v_n \leqslant w_n < \ell + \varepsilon$. Donc

$$\forall n \geqslant n_3, v_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon].$$

Donc v converge vers ℓ. □

Exercice 2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier n non nul par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2 + k}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et donner sa limite.
Solution : Soit $k \in [\![0, n]\!]$, $\frac{n}{n^2+n} \leqslant \frac{n}{n^2+k} \leqslant \frac{n}{n^2}$, et donc $\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{n}{n^2+k} \leqslant \frac{1}{n}$. En sommant sur $k \in [\![0, n]\!]$, on obtient $1 \leqslant u_n \leqslant \frac{n+1}{n}$, donc par théorème d'encadrement, u converge vers 1.

Proposition 2.8 (Encadrement avec des valeurs absolues)

Soient u et v deux suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$. Si v est de limite nulle et qu'à partir d'un certain rang, $|u_n - \ell| \leqslant v_n$, alors u converge vers ℓ.

Démonstration. Par hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant v_n$. Donc $\forall n \geqslant n_0$, $\ell - v_n \leqslant u_n \leqslant \ell + v_n$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ell - v_n) = \ell = \lim\limits_{n\to+\infty}(\ell + v_n)$, le théorème d'encadrement donne $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. □

Remarque. Ce résultat est particulièrement pratique si on sait conjecturer la valeur de la limite.

Proposition 2.9 (Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle)

Soit u une suite bornée et v une suite de limite nulle, alors la suite uv est également de limite nulle.

Démonstration. La suite u est bornée, donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant K$. Par propriétés de la valeur absolue, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n v_n| = |u_n|\,|v_n| \leqslant K\,|v_n|$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} K\,|v_n| = 0$. Donc par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$. □

Proposition 2.10 (Théorème de comparaison)

Soient u et v deux suites réelles telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$.
- Si u diverge vers $+\infty$ alors v diverge vers $+\infty$.
- Si v diverge vers $-\infty$ alors u diverge vers $-\infty$.

Démonstration. On montre le premier résultat, le deuxième se montre de la même manière. Soit $A > 0$. D'après les hypothèses, il existe des entiers n_0 et n_1 tels que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$ et $\forall n \geqslant n_1$, $u_n \leqslant A$. Pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on a donc $v_n \geqslant u_n \leqslant A$ donc $v_n \leqslant A$. Ce qui termine la preuve. □

3 Cas des suites monotones

3.1 Théorème de convergence

Proposition 3.1 (Théorème de la limite monotone)

- Toute suite croissante et majorée converge vers ℓ, sa borne supérieure.
- Toute suite décroissante et minorée converge vers ℓ, sa borne inférieure.
- Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Démonstration. On effectue la preuve dans le cas d'une suite u croissante, le cas décroissant se traite de même.
- On suppose que u est majorée. L'ensemble $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble de réels non vide, qui admet un majorant, donc (par théorème de la borne supérieure) une borne supérieure $\ell \in \mathbb{R}$.
  Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de ℓ, $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de u. Donc il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} \geqslant \ell - \varepsilon$. Comme de plus u est croissante, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0} \geqslant \ell - \varepsilon$. Par ailleurs, ℓ est un majorant de u, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant \ell + \varepsilon$. On en déduit que $\forall n \geqslant n_0$, $-\varepsilon \leqslant u_n - \ell \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Donc u converge vers ℓ.
- On suppose que u n'est pas majorée. Soit $A > 0$. Comme A n'est pas un majorant, il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} \geqslant A$. Comme de plus u est croissante, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0} \geqslant A$. Donc u diverge vers $+\infty$.

□

Remarque. Attention, connaître un majorant quelconque ne signifie pas qu'il s'agit de la limite de la suite.

Exercice 3. Soit $x \in \mathbb{R}$,

1. Montrer que $\left(\dfrac{x^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$.

Ce résultat s'ajoute aux résultats de croissances comparées déjà connus et pourra être utilisé sans le redémontrer.
Solution :

1. Si $x = 0$, c'est immédiat (convergence vers 0). Sinon, soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \left|\frac{x^n}{n!}\right|$. Cette suite est à valeurs strictement positives, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|}{n+1} < 1$ à partir d'un certain rang. La suite est donc décroissante (à partir d'un certain rang) et minorée par 0, donc elle converge vers un réel ℓ.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \frac{|x|}{n+1}$. Comme u converge, on peut passer à la limite dans cette égalité, ce qui donne $\ell = \ell \times 0 = 0$. Donc u converge vers 0. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$.

3.2 Suites adjacentes

Définition 3.2 (Suites adjacentes)

Soient u et v deux suites réelles. On dit qu'elles sont **adjacentes** lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Proposition 3.3 (Convergence des suites adjacentes)

Soit u et v deux suites adjacentes telles que u est croissante et v est décroissante. Alors u et v convergent vers une même limite réelle ℓ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

Démonstration. On procède par étapes successives :
- $u - v$ converge (vers 0), et est donc majorée par un réel M.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_n - v_n + v_n \leqslant M + v_n \leqslant M + v_0$ par décroissance de v. Donc u est majorée. Or u est croissante : par théorème des suites monotones, elle converge vers un réel ℓ_u, et on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ell_u \geqslant u_n$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_n - u_n + u_n \geqslant -M + u_n \geqslant -M + u_0$ par croissance de u. Donc v est minorée. Or v est décroissante : par théorème des suites monotones, elle converge vers un réel ℓ_v, et on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ell_v \leqslant v_n$.
- Par somme de limites, $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell_u - \ell_v$. Or on a supposé que cette suite convergeait vers 0. Donc $\ell_u = \ell_v$. Donc u et v convergent vers une même limite réelle, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

□

Exercice 4. Soit, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \sum\limits_{p=0}^{n} \dfrac{1}{p!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$. Démontrer que ces suites convergent.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} \geqslant 0$. Donc u est croissante.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!} = \dfrac{2-n-1}{(n+1)!} = \dfrac{1-n}{(n+1)!} \leqslant 0$. Donc v est décroissante.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \dfrac{1}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $v - u$ tend vers 0.

Les deux suites sont donc adjacentes. Donc elles convergent (vers une même limite). On verra plus tard dans l'année que la limite en question vaut e.

3.3 Approximations décimales d'un réel

Définition 3.4 (Approximations décimales de x)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Les suites $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $p_n = q_n + \frac{1}{10^n}$ sont deux suites de décimaux qui convergent vers x.
On appelle q_n (resp. p_n) la **valeur décimale approchée de** x par défaut (resp. par excès) à 10^{-n} près.

Remarque. Tout réel est donc limite d'une suite de rationnels.

Démonstration. Il est immédiat que les suites p et q sont composées de décimaux. De plus :
- Soit $n \in \mathbb{N}$, $p_n - q_n = \dfrac{1}{10^n}$ qui converge vers 0.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, $q_{n+1} - q_n = \dfrac{\lfloor 10^{n+1}x \rfloor - 10 \lfloor 10^n x \rfloor}{10^{n+1}}$.
Par définition de la partie entière, $\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x$, donc $10 \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^{n+1}x$. Or $10 \lfloor 10^n x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\lfloor 10^{n+1}x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à $10^{n+1}x$. Donc $10 \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant \lfloor 10^{n+1}x \rfloor$ et $\lfloor 10^{n+1}x \rfloor - 10 \lfloor 10^n x \rfloor \geqslant 0$.
Donc $q_{n+1} - q_n \geqslant 0$, et la suite q est croissante.
— Soit $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} - p_n = \dfrac{\lfloor 10^{n+1}x \rfloor - 10 \lfloor 10^n x \rfloor - 9}{10^{n+1}}$.
Par définition de la partie entière, $10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$, donc $10^{n+1}x < 10 \lfloor 10^n x \rfloor + 10$, ce qui donne ensuite $\lfloor 10^{n+1}x \rfloor < 10 \lfloor 10^n x \rfloor + 10$. Les deux valeurs étant entières, on en déduit $\lfloor 10^{n+1}x \rfloor \leqslant 10 \lfloor 10^n x \rfloor + 9$ et donc $\lfloor 10^{n+1}x \rfloor - 10 \lfloor 10^n x \rfloor - 9 \leqslant 0$.
Donc $p_{n+1} - p_n \leqslant 0$, et la suite p est décroissante.

Donc p et q sont des suites adjacentes. Donc elles convergent vers un même réel ℓ.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$, donc en divisant par $10^n > 0$, $q_n \leqslant x < p_n$. Un passage à la limite dans cette inégalité donne $\ell \leqslant x \leqslant \ell$. Donc $\ell = x$, d'où le résultat annoncé. □

Exemple. Les premiers développements décimaux de π donnent les valeurs suivantes :

$$q_0 = 3 \text{ et } p_0 = 4, \quad q_1 = 3,1 \text{ et } p_1 = 3,2, \quad q_2 = 3,14 \text{ et } p_2 = 3,15, \quad q_3 = 3,141 \text{ et } p_3 = 3,142, \ldots$$

4 Suites extraites

Définition 4.1 (Suite extraite)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle **suite extraite** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où φ est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante.

Exemple. Les sous-suites paire et impaire $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 4.2 (Suite extraite d'une suite convergente)

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.

Démonstration. On effectue la preuve dans le cas d'une limite $\ell \in \mathbb{R}$, mais le raisonnement fonctionne de la même façon dans le cas des limites infinies.
Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Si on montre que quand $n \geqslant n_0$, $\varphi(n) \geqslant n \geqslant n_0$, on aura bien $\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$, d'où le résultat demandé.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose donc $P(n)$ la propriété « $\varphi(n) \geqslant n$ ». La montrer par récurrence terminera la preuve.
— $\varphi(0) \in \mathbb{N}$, donc $\varphi(0) \geqslant 0$ et $P(0)$ est vraie.
— Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie. La stricte croissante de φ donne alors $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geqslant n$. Or φ est à valeurs entières. Donc $\varphi(n+1) \geqslant n+1$, donc $P(n+1)$ est vraie.

D'où le résultat annoncé. □

Remarque. Ce résultat est très pratique pour montrer la divergence d'une suite : il suffit de construire deux suites extraites n'ayant pas la même limite.

Exercice 5. Montrer que la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
Solution : Les suites extraites $((-1)^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $((-1)^{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers 1 et -1. Comme ces deux valeurs sont différentes, la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Proposition 4.3 (Convergence des sous-suites paire et impaire)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence, il existe des entiers n_0 et n_1 tels que $\forall n \geqslant n_0$, $|u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$ et $\forall n \geqslant n_1$, $|u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Soit $n \geqslant \max(2n_0, 2n_1 + 1)$. Si n est pair, $\exists k \geqslant n_0$ tel que $n = 2k$ et on a $|u_{2k} - \ell| \leqslant \varepsilon$. Si n est impair, $\exists k \geqslant n_1$ tel que $n = 2k+1$ et on a $|u_{2k+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$. Donc dans tous les cas, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Donc u converge vers ℓ. □

5 Suites à valeurs complexes

Définition 5.1 (Suite complexe)

On appelle **suite complexe** toute fonction u définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ et on note $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs complexes.

Remarque. Le symbole $\leqslant$ n'a aucun sens entre deux nombres complexes. Les notions de suite croissante, décroissante, majorée, minorée, divergente vers $+\infty$ n'ont donc pas de sens dans le cadre complexe.
Par conséquent, on n'utilisera pas non plus de théorème d'encadrement, de convergence monotone ou de suites adjacentes.

Définition 5.2 (Suite bornée)

Soit u une suite complexe. On dit que u est **bornée** quand $\exists K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant K$.

Remarque. Autrement dit, une suite complexe u est bornée s'il existe un disque de centre 0 qui contient tous les u_n (K représente alors le rayon du disque).

Définition 5.3 (Convergence d'une suite vers un complexe)

Soit ℓ un nombre complexe. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers ℓ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant n_0, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Remarque. Autrement dit, une suite complexe u converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si quel que soit $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang, tous les u_n sont dans le disque de centre ℓ et de rayon ε.

Remarque. Il est équivalent d'écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ (convergence dans $\mathbb{C}$) et $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$ (convergence dans $\mathbb{R}$). Ce résultat peut aider à montrer des convergences de suites complexes.

Exercice 6. Étudier la convergence de la suite complexe définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = i + \dfrac{e^{in\frac{\pi}{3}}}{n}$.
Solution : On conjecture que la limite vaudra i.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - i| = \left|\dfrac{e^{in\frac{\pi}{3}}}{n}\right| = \dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$. Donc u converge bien vers i.

Remarque. Plusieurs résultats sur les convergences réelles restent valables dans $\mathbb{C}$:
- l'unicité de la limite,
- une suite complexe qui converge est nécessairement bornée,
- les opérations usuelles sur les limites (à l'exception de l'utilisation des symboles ∞).

Proposition 5.4 (Convergence des parties réelle et imaginaire)

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes et soit $\ell \in \mathbb{C}$. On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}(\ell) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(u_n) = \mathrm{Im}(\ell).$$

Démonstration. On montre successivement les deux implications.
- On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$|\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(\ell)| = |\mathrm{Re}(u_n - \ell)| \leqslant |u_n - \ell|.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$. Donc par théorème d'encadrement (appliqué à des suites à valeurs réelles), $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}(\ell)$.
On montre de même la convergence des parties imaginaires.

— On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}(\ell)$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(u_n) = \mathrm{Im}(\ell)$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \ell| = \sqrt{(\mathrm{Re}(u_n - \ell))^2 + (\mathrm{Im}(u_n - \ell))^2} = \sqrt{(\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(\ell))^2 + (\mathrm{Im}(u_n) - \mathrm{Im}(\ell))^2}.$$

Cette expression converge vers $\sqrt{0^2 + 0^2} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

□

Exemple. La suite complexe définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2 + \frac{i}{n}$ converge vers 2.

6 Quelques suites particulières

6.1 Suites arithmético-géométriques

Définition 6.1 (Suite arithmético-géométrique)

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmético-géométrique** lorsqu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque. On connaît déjà quelques cas particuliers :
— Si $a = 1$, c'est une suite arithmétique et si $p \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant p$, $u_n = u_p + (n - p)b$.
— Si $b = 0$, c'est une suite géométrique et si $p \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant p$, $u_n = u_p a^{n-p}$.

Proposition 6.2 (Terme général d'une suite arithmético-géométrique)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$, avec $a \neq 1$. Alors, pour tous entiers n et p tels que $n \geqslant p$,

$$u_n = a^{n-p}(u_p - c) + c \text{ avec } c = \frac{b}{1-a}.$$

Remarque. La suite constante égale à c est l'unique suite constante qui vérifie la relation de récurrence, c'est-à-dire l'unique solution sur $\mathbb{C}$ de l'équation $x = ax + b$.

Démonstration. Soit p un entier fixé et $n \geqslant p$, la relation vérifiée par c donne :

$$u_{n+1} - c = (au_n + b) - (ac + b) = au_n - ac = a(u_n - c).$$

On reconnaît une suite géométrique, ce qui permet de conclure que pour tous entiers n et p tels que $n \geqslant p$,

$$u_n - c = a^{n-p}(u_p - c).$$

□

Exercice 7. Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -2u_n + 3$. Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
Solution : L'équation $x = -2x + 3$ a pour unique solution $x = 1$, on étudie donc la suite $(u_n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - 1 = -2u_n + 2 = -2(u_n - 1).$$

On reconnaît une suite géométrique, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - 1 = (-2)^n(u_0 - 1) = (-2)^n(1 - 1) = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 + 0 = 1.$$

6.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 6.3 (Suite récurrente linéaire d'ordre 2, équation caractéristique)

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants** lorsqu'il existe $(a,b)\in\mathbb{C}^2\setminus\{(0,0)\}$ tels que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$.
On appelle **équation caractéristique** associée l'équation $q^2=aq+b$, d'inconnue $q\in\mathbb{C}$.

Remarque. Étudions le cas particulier des suites géométriques. Soit $q\in\mathbb{C}^*$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=q^n$. Alors :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n \iff \forall n\in\mathbb{N}, q^{n+2}=aq^{n+1}+bq^n \iff q^2=aq+b,$$

où on a divisé par $q^n\neq 0$. On a donc retrouvé l'équation caractéristique dans un cas particulier.

Proposition 6.4 (Étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, cas complexe)

Soit u une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients complexes, d'équation caractéristique (E).
- Si (E) a deux solutions complexes distinctes q_1 et q_2, $\exists!(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tels que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\alpha q_1^n+\beta q_2^n$.
- Si (E) a une unique solution complexe q_0, $\exists!(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tels que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=(\alpha n+\beta)q_0^n$.

Remarque. Résoudre (E) revient à déterminer les racines d'un polynôme de degré 2 à coefficients complexes, ce qu'on apprendra à faire dans le chapitre « Applications des nombres complexes ».

Démonstration. Soit u une suite récurrente linéaire double d'équation caractéristique $q^2=aq+b$ admettant deux solutions complexes distinctes q_1 et q_2 (le cas d'une unique solution q_0 se traiterait de la même manière).
- Analyse : on suppose qu'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tels que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\alpha q_1^n+\beta q_2^n$. Donc $u_0=\alpha+\beta$ et $u_1=\alpha q_1+\beta q_2$. On résout le système : $\alpha=u_0-\beta$ et $u_1=u_0q_1-\beta q_1+\beta q_2$, donc (comme $q_1\neq q_2$) $\beta=\frac{u_1-u_0q_1}{q_2-q_1}$ et $\alpha=u_0-\frac{u_1-u_0q_1}{q_2-q_1}$.
- Synthèse : on pose $\beta=\frac{u_1-u_0q_1}{q_2-q_1}$ et $\alpha=u_0-\frac{u_1-u_0q_1}{q_2-q_1}$. Soit $n\in\mathbb{N}$, on pose $P(n)$: « $u_n=\alpha q_1^n+\beta q_2^n$ ».
  - $\alpha q_1^0+\beta q_2^0=\alpha+\beta=u_0-\frac{u_1-u_0q_1}{q_2-q_1}+\frac{u_1-u_0q_1}{q_2-q_1}=u_0$. Donc $P(0)$ est vraie.
  - $\alpha q_1^1+\beta q_2^1=\left(u_0-\frac{u_1-u_0q_1}{q_2-q_1}\right)q_1+\left(\frac{u_1-u_0q_1}{q_2-q_1}\right)q_2=u_0q_1+\frac{u_1-u_0q_1}{q_2-q_1}(q_2-q_1)=u_1$. Donc $P(1)$ est vraie.
  - Soit $n\in\mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies. alors :

$$\begin{aligned}u_{n+2}&=au_{n+1}+bu_n\\&=a\left(\alpha q_1^{n+1}+\beta q_2^{n+1}\right)+b\left(\alpha q_1^n+\beta q_2^n\right)\\&=\alpha q_1^n(aq_1+b)+\beta q_2^n(aq_2+b)\\u_{n+2}&=\alpha q_1^{n+2}+\beta q_2^{n+2}\end{aligned}$$

  puisque q_1 et q_2 sont solution de $q^2=aq+b$. Donc $P(n+2)$ est vraie.
  Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\alpha q_1^n+\beta q_2^n$. Les valeurs fixées pour α et β conviennent bien.
- Conclusion : il existe un unique couple $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ qui répond au problème.

□

Proposition 6.5 (Étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, cas réel)

Soit u une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients réels, d'équation caractéristique (E).
- Si (E) a deux solutions réelles distinctes q_1 et q_2, $\exists!(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\alpha q_1^n+\beta q_2^n$.
- Si (E) a une unique solution réelle q_0, $\exists!(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=(\alpha n+\beta)q_0^n$.
- Si (E) a deux solutions complexes (non réelles) conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ (avec $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$), $\exists!(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=r^n(\alpha\cos(n\theta)+\beta\sin(n\theta))$.

Remarque. Dans le cas des racines complexes, le choix entre θ et $-\theta$ pour l'argument n'a pas d'importance : le résultat final sera le même après prise en compte des conditions initiales.

Démonstration. Les deux premiers cas s'obtiennent comme dans le cas complexe (la seule différence étant que toutes les données manipulées sont réelles).
On se place maintenant dans le cas de deux racines conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ (avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$). En appliquant le résultat sur les suites à coefficients complexes (ce qu'on peut faire puisqu'un réel est aussi un complexe), on obtient : $\exists (A, B) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = A(re^{i\theta})^n + B(re^{-i\theta})^n = r^n(Ae^{in\theta} + Be^{-in\theta})$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$, un passage au conjugué donne $u_n = r^n(\overline{Ae^{in\theta} + Be^{-in\theta}})$. Sommer les deux relations donne alors :

$$2u_n = r^n \left(Ae^{in\theta} + Be^{-in\theta} + \overline{Ae^{in\theta} + Be^{-in\theta}} \right),$$

ce qui donne en divisant par 2 et grâce aux propriétés de la partie réelle : $u_n = r^n \operatorname{Re}\left(Ae^{in\theta} + Be^{-in\theta}\right)$. Or :

$$\operatorname{Re}\left(Ae^{in\theta}\right) = \operatorname{Re}\Big((\operatorname{Re}(A) + i\operatorname{Im}(A))(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))\Big) = \operatorname{Re}(A)\cos(n\theta) - \operatorname{Im}(A)\sin(n\theta),$$

et de même $\operatorname{Re}(Be^{-in\theta}) = \operatorname{Re}(B)\cos(-n\theta) - \operatorname{Im}(B)\sin(-n\theta)$. Par parité des fonctions trigonométriques, on trouve en posant $\alpha = \operatorname{Re}(A) + \operatorname{Re}(B) \in \mathbb{R}$ et $\beta = -\operatorname{Im}(A) + \operatorname{Im}(b) \in \mathbb{R}$:

$$u_n = r^n \left(\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta)\right).$$

Les conditions initiales (valeurs de u_0 et u_1) garantissent ensuite l'unicité de α et β. □

Exercice 8. Soit u la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
Solution : On identifie une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $q^2 - q - 1 = 0$. On trouve pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$. L'équation a donc deux solutions réelles distinctes, $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Donc $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n.$$

Comme $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, on doit nécessairement avoir $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha q_1 + \beta q_2 = 1$. Donc en remplaçant, $\beta = -\alpha$ et $\alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$, ce qui donne $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

6.3 Suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition 6.6 (Intervalle stable par une fonction)

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie sur E.
Soit I un intervalle de E. On dit que I est **stable par** f si $f(I) \subset I$, c'est-à-dire si $\forall x \in I$, $f(x) \in I$.

Exemple. $\mathbb{R}_+$ et $[0, 1]$ sont stables par la fonction $x \to \sqrt{x}$.

Proposition 6.7 (Bonne définition d'une suite récurrente)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I stable par f. Soit $a \in I$. On peut définir une suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les relations $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Cette suite est de plus à valeurs dans I.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$ la propriété « u_n est bien défini et $u_n \in I$ ».
- $u_0 = a \in I$, donc $P(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie. Alors u_n existe et est dans I, donc $f(u_n)$ existe, donc u_{n+1} est bien défini. De plus, $u_n \in I$ est f est stable par I, donc $u_{n+1} = f(u_n) \in I$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

D'où le résultat annoncé. □

Remarque. Si l'intervalle n'est pas stable, la suite peut ne pas être bien définie. Par exemple, on ne peut pas définir de suite u par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3 + \sqrt{4 - u_n}$: on aurait $u_1 = 3 + \sqrt{4} = 5$, mais la définition de u_2 poserait ensuite problème...

Exemple. L'intervalle $\mathbb{R}_+$ est stable par la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$. On peut donc définir une suite récurrente par les conditions $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$.

Proposition 6.8 (Étude de la monotonie)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

- Si $x \mapsto f(x) - x$ est positive sur I, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Si $x \mapsto f(x) - x$ est négative sur I, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- Si f est croissante sur I, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone (elle est croissante si $u_0 \leqslant u_1$, décroissante sinon).

Démonstration. Le résultat précédent garantit que la suite est bien définie et à valeurs dans I.

- On suppose que $x \mapsto f(x) - x$ est positive sur I. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geqslant 0$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- On suppose que $x \mapsto f(x) - x$ est négative sur I. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leqslant 0$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- On suppose que f est croissante sur I et que $u_0 \leqslant u_1$ (le cas $u_0 \geqslant u_1$ se traite de la même manière). Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$ la propriété « $u_n \leqslant u_{n+1}$ ».
  - $u_0 \leqslant u_1$, donc $P(0)$ est vraie.
  - Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie, donc $u_n \leqslant u_{n+1}$. En composant par f croissante sur I, on obtient $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$, donc $P(n+1)$ est vraie.

  D'où le résultat et la croissance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

□

Remarque. Si f est décroissante, $f \circ f$ sera croissante. Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $f \circ f(u_n) = f(f(u_n)) = f(u_{n+1}) = u_{n+2}$. À défaut de mener l'étude directement, on peut donc montrer la monotonie de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

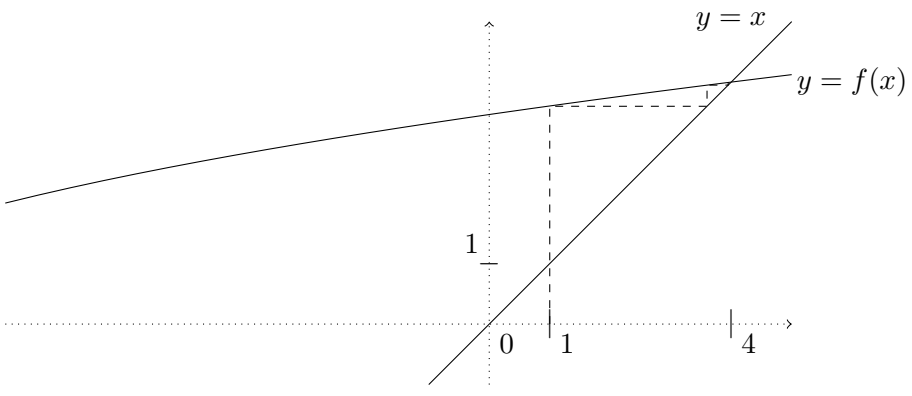
Proposition 6.9 (Théorème du point fixe)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I stable par f. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I définie par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si la suite u converge vers un réel $\ell \in I$, alors $\ell = f(\ell)$ (on dit alors que ℓ est un point fixe de f).

Démonstration. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et f est continue en $\ell \in I$, une composition de limites donne que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$ (ce résultat sera formalisé dans le chapitre « Limites et continuité »). Il suffit alors de passer à la limite dans la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ pour obtenir $\ell = f(\ell)$. □

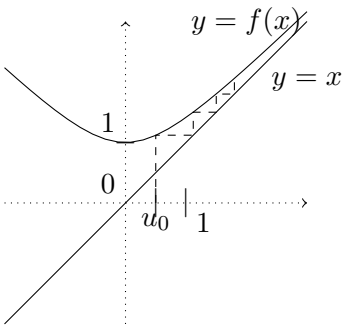
Remarque. Attention, on ne peut appliquer ce théorème que si on sait déjà que la suite converge.

Exercice 9. Étudier la suite w définie par $w_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = \sqrt{12 + w_n}$.
Solution : Un dessin permet de conjecturer le comportement : ici, la suite semble convergente.



On vérifie maintenant que la suite est bien définie. Soit $x \in [0,4]$, alors $12+x \in [12,16]$ et par croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, $\sqrt{12+x} \in [\sqrt{12},\sqrt{16}] \subset [0,4]$. L'intervalle $[0,4]$ est donc stable par la fonction $x \mapsto \sqrt{12+x}$. La suite w est donc bien définie et à valeurs dans $[0,4]$.
Étudions maintenant les variations de la suite. La fonction $x \mapsto \sqrt{12+x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (donc sur $[0,4]$) comme composée de fonctions croissantes, et on a $w_1 = \sqrt{13} \geqslant 1 = w_0$. Donc la suite w est croissante.
La suite w est donc croissante et majorée par 4, elle converge par conséquent vers un réel ℓ. Comme w est à valeurs dans $[0,4]$, on obtient $\ell \in [0,4]$. De plus, $x \mapsto \sqrt{12+x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (donc sur en ℓ) : par théorème du point fixe, $\ell = \sqrt{12+\ell}$. Donc $\ell^2 - \ell - 12 = 0$, qui a pour racines 4 et -3. Donc $\ell = 4$, et la suite w converge vers 4.

Exercice 10. On considère la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$. Est-elle bien définie ? Étudier sa convergence.
Solution : Un dessin permet de conjecturer le comportement : ici, la suite semble croissante et diverger vers $+\infty$.



L'intervalle $\mathbb{R}$ est stable par la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$, donc la suite u est bien définie.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 \geqslant x^2$, donc par croissance de la racine sur $\mathbb{R}_+$, $\sqrt{1+x^2} \geqslant |x| \geqslant x$. La fonction $x \mapsto \sqrt{1+x^2} - x$ est donc positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la suite u est croissante.
Pour l'étude de convergence, on suppose que la suite u converge vers un réel ℓ. La fonction $f : x \to \sqrt{1+x^2}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$, donc en particulier en ℓ, et le théorème du point fixe donne : $\ell = \sqrt{1+\ell^2}$, donc $\ell^2 = 1+\ell^2$ donc $0 = 1$. C'est absurde, donc la suite diverge. Et comme elle est croissante, elle diverge vers $+\infty$.