Étude globale d'une fonction sur un intervalle

Cours de É. Bouchet – ECS1

18 novembre 2019

Table des matières

Dans tout le chapitre, les fonctions considérées seront définies sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

1 Premiers points d'étude d'une fonction

1.1 Périodicité et symétries

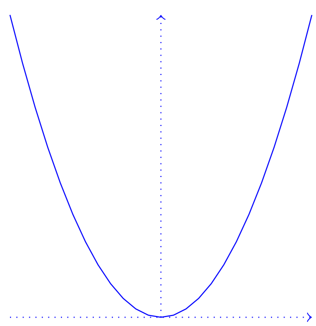
Définition (Fonction paire, impaire)**.**

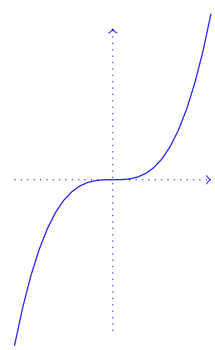
Soit f une fonction définie sur un ensemble E centré en 0.
- On dit que f est **paire** lorsque $\forall x \in E$, $f(-x) = f(x)$.
- On dit que f est **impaire** lorsque $\forall x \in E$, $f(-x) = -f(x)$.

Proposition.

Soit f une fonction définie sur un ensemble E centré en 0.
- Si f est une fonction paire, alors sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si f est une fonction impaire, alors sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

Exemple 1. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$ est paire, alors que $x \mapsto x^3$ est impaire.





Définition (Fonction périodique)**.**

Soit f une fonction définie sur un ensemble E. On dit que f est **périodique** quand il existe un réel T non nul tel que :

$$x \in E \Longleftrightarrow x + T \in E,$$

et

$$\forall x \in E, \quad f(x+T) = f(x).$$

On dit alors que f est T-périodique, et le réel T est appelé une **période** de f.

Exemple 2. Les fonction sin et cos sont périodiques de période 2π.

1.2 Bornes

Définition (Majorant, minorant)**.**

Soit f une fonction définie sur un ensemble E.

- On dit que f est **majorée** lorsqu'il existe un réel M tel que $\forall x \in E$, $f(x) \leqslant M$. Le réel M est alors **un majorant** de f sur E.
- On dit que f est **minorée** lorsqu'il existe un réel m tel que $\forall x \in E$, $f(x) \geqslant m$. Le réel m est alors **un minorant** de f sur E.
- On dit que f est **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée.

Définition.

Soit f une fonction définie sur un ensemble E, et $x_0 \in E$.

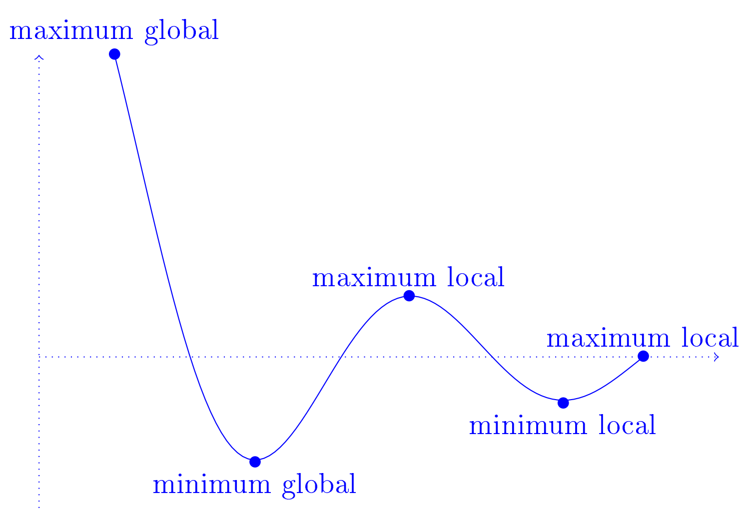
- On dit que f admet un **maximum global** en x_0 lorsque $\forall x \in E$, $f(x) \leqslant f(x_0)$. On note

$$f(x_0) = \max_{x \in E} f(x).$$

- On dit que f admet un **maximum local** en x_0 lorsqu'il existe un voisinage V de x_0 tel que $\forall x \in V \cap E$, $f(x) \leqslant f(x_0)$.
- On dit que f admet un **minimum global** en x_0 lorsque $\forall x \in E$, $f(x) \geqslant f(x_0)$. On note

$$f(x_0) = \min_{x \in E} f(x).$$

- On dit que f admet un **minimum local** en x_0 lorsqu'il existe un voisinage V de x_0 tel que $\forall x \in V \cap E$, $f(x) \geqslant f(x_0)$.



1.3 Monotonie

Définition (Fonction croissante).

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- On dit que f est une fonction **croissante** sur l'intervalle I lorsque pour tout $(a,b) \in I^2$,
$$a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \leqslant f(b).$$
- On dit que f est une fonction **strictement croissante** sur l'intervalle I lorsque pour tout $(a,b) \in I^2$,
$$a < b \Longrightarrow f(a) < f(b).$$

Définition (Fonction décroissante).

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- On dit que f est une fonction **décroissante** sur l'intervalle I lorsque pour tout $(a,b) \in I^2$,
$$a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \geqslant f(b).$$
- On dit que f est une fonction **strictement décroissante** sur l'intervalle I lorsque pour tout $(a,b) \in I^2$,
$$a < b \Longrightarrow f(a) > f(b).$$

Définition (Fonction monotone).

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est une fonction **monotone** sur l'intervalle I lorsque f est croissante ou décroissante sur I, et que f est **strictement monotone** sur I si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

Proposition (Composée de fonctions monotones).

Soit f et g deux fonctions monotones sur I et $f(I)$ respectivement. Alors $g \circ f$ est monotone sur I, et :
- Si f et g ont le même sens de variation, alors $g \circ f$ est croissante sur I.
- Si f et g ont des sens de variation opposés, alors $g \circ f$ est décroissante sur I.

Démonstration. Soit a et b des éléments de I tels que $a \leqslant b$.
- Si f et g sont croissantes sur I et $f(I)$:
  $a \leqslant b$, donc $f(a) \leqslant f(b)$, puis $g(f(a)) \leqslant g(f(b))$.
  Donc $g \circ f$ est croissante sur I.
- Si f est croissante sur I et g décroissante sur $f(I)$:
  $a \leqslant b$, donc $f(a) \leqslant f(b)$, puis $g(f(a)) \geqslant g(f(b))$.
  Donc $g \circ f$ est décroissante sur I.
- On traite les autres cas par la même méthode.

$\square$

Remarque. On ne peut par contre absolument rien dire sur le produit de deux fonctions croissantes.

Exemple 3. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -1$ et $g(x) = -e^{-x}$. Étudier les monotonies de f, g et $f \times g$.
Les fonctions f et g sont croissantes sur $\mathbb{R}$ (f est même constante). Par contre, $\forall x \in \mathbb{R}$, $fg(x) = e^{-x}$ donc le produit $f \times g$ est décroissant sur $\mathbb{R}$.

1.4 Théorème de la limite monotone

Théorème (Théorème de la limite monotone, cas croissant)**.**

Soit a et b des réels tels que $a < b$, et f une fonction monotone définie sur l'intervalle $]a, b[$. Alors pour tout point x_0 de $]a, b[$, f admet une limite à gauche et à droite en x_0, et ces limites sont finies. En particulier :

— Si f est croissante sur $]a, b[$ alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ existe et est égale à

$$\begin{cases} \sup_{]a,b[} f & \text{si } f \text{ est majorée sur }]a, b[, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

— Si f est croissante sur $]a, b[$ alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existe et est égale à

$$\begin{cases} \inf_{]a,b[} f & \text{si } f \text{ est minorée sur }]a, b[, \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque. Ce résultat reste vrai si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

Démonstration. On va montrer le résultat en b^-, les autres cas se montrent de la même façon. Soit l'ensemble

$$A = f(]a, b[).$$

— Si f est majorée, l'ensemble A est non vide et majoré, et donc (théorème de la borne supérieure) possède une borne supérieure réelle M.
— Si f n'est pas majorée, on pose $M = +\infty$.

Pour montrer que la limite de f en b est bien M, il suffit (que b soit fini ou non) de démontrer que pour tout $m < M$, il existe $x_m \in]a, b[$ tel que

$$\forall x \in [x_m, b[, \quad f(x) \in]m, M].$$

Soit un réel $m < M$. Par définition de M (le plus petit majorant de A dans $\mathbb{R}$ ou $+\infty$), le réel m n'est pas un majorant de A. On peut donc trouver un réel $x_m \in]a, b[$ tel que $f(x_m) > m$. La croissance de f sur $]a, b[$ et la définition de M donnent alors :

$$\forall x \in [x_m, b[, \quad m < f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant M,$$

ce qui termine la preuve. □

Remarque. On obtient de même le comportement quand f est décroissante sur $]a, b[$:

— $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ existe et est égale à

$$\begin{cases} \inf_{]a,b[} f & \text{si } f \text{ est minorée sur }]a, b[, \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

— $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existe et est égale à

$$\begin{cases} \sup_{]a,b[} f & \text{si } f \text{ est majorée sur }]a, b[, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

2 Fonctions continues sur un intervalle

Définition (Fonction continue sur un intervalle)**.**

Soit f une fonction définie sur un ensemble E, et I un intervalle inclus dans E. On dit que f est **continue sur l'intervalle** I lorsque f est continue en tout point de l'intervalle I.

Exemple 4. Parmi les fonctions classiques,
- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$,
- La fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions sin et cos sont continues sur $\mathbb{R}$.

Exemple 5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x^3 & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer sa continuité sur $\mathbb{R}$.
La fonction f est égale à une fonction polynôme sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, elle est donc continue sur ces intervalles. Reste à étudier la continuité en 0 :

$$\lim_{x\to 0+} x^2 = f(0) = 0 = \lim_{x\to 0-} -x^3.$$

La fonction est donc continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}$ tout entier.
Attention : f est également une fonction polynôme sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$, mais ça ne signifie pas nécessairement qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$ ($\mathbb{R}_+$ donne une limite en 0_+ et $\mathbb{R}_-$ en 0_-, mais ces limites pourraient ne pas être égales). Il est toujours nécessaire d'étudier le raccord en 0 .

2.1 Opérations algébriques et composition

Proposition (Composition de fonctions continues)**.**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et g une fonction continue sur un intervalle J contenant $f(I)$. Alors $g \circ f$ est continue sur l'intervalle I.

Proposition (Opérations sur les fonctions continues)**.**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, qui s'écrit comme la somme, le produit ou le quotient (si le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur I. Alors f est continue sur I.

Démonstration. Ces deux propositions découlent directement des opérations sur les limites et des résultats sur la continuité en un point. □

Proposition (Espace vectoriel des fonctions continues)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions réelles définies et continues sur I, noté $C(I)$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. (démonstration à connaître) On va montrer que c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$:

— La fonction nulle est continue sur I, donc $C(I)$ est non vide.
— Soit f et g deux fonctions de $C(I)$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Par la proposition précédente, $\lambda f + g$ est définie et continue sur I. Donc $\lambda f + g \in C(I)$.

Donc $C(I)$ est un sous espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, c'est donc un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

□

2.2 Prolongement par continuité

Définition (Prolongement par continuité)**.**

Soit x_0 un réel, I un intervalle ouvert contenant x_0 et f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$. On suppose que f est continue en tout point de $I \setminus \{x_0\}$ et que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

On définit sur I la fonction $\widetilde{f}$ par : $\begin{cases} \widetilde{f}(x) = f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \widetilde{f}(x_0) = \ell \end{cases}$.

La fonction $\widetilde{f}$ est continue en x_0 et sur I tout entier, et est appelée le **prolongement par continuité** de f en x_0.

2.3 Fonctions continues par morceaux

Définition (Fonction continue par morceaux)**.**

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Une fonction f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ lorsqu'il existe une subdivision

$$a_0 = a < a_1 < \dots a_n = b$$

telle que les restrictions de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ sont continues et admettent un prolongement continu sur $[a_i, a_{i+1}]$

Remarque. Cela signifie concrètement que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$, f admet une limite finie à gauche en a_{i+1} et une limite finie à droite en a_i.

Exemple 6. La fonction partie entière est continue par morceaux sur $[-1, 2]$.

3 Principaux théorèmes

3.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires, forme faible)**.**

Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Si $f(a)f(b) < 0$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Remarque. Si $f(a)f(b) \leqslant 0$ alors le résultat reste vrai avec $c \in [a, b]$.

Exemple 7. Montrer que toute fonction polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.
On note f la fonction polynôme, et αx^p son terme de plus haut degré, avec p impair. On va traiter le cas $\alpha > 0$, le cas $\alpha < 0$ se traite similairement.

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Donc il existe $a \in \mathbb{R}_-^*$ tel que $f(a) < 0$.
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Donc il existe $b \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(b) > 0$.

Donc $a < b$ et $f(a)f(b) < 0$. Or la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[a, b]$ (car c'est une fonction polynôme). Le théorème des valeurs intermédiaires nous donne donc l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$, c'est-à-dire tel que c est racine de f. D'où le résultat.

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires, forme forte)**.**

Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Pour tout réel y compris strictement entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $y = f(c)$.

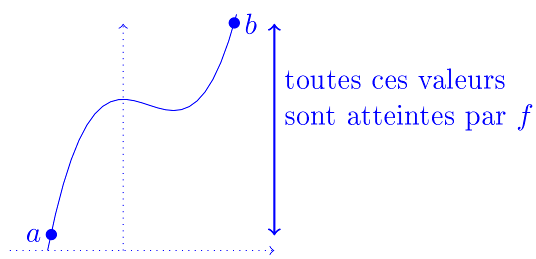
Remarque. Si y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (au sens large), alors le résultat reste vrai avec $c \in [a, b]$.

Démonstration. (démonstration à connaître) Soit y compris strictement entre $f(a)$ et $f(b)$. Soit g la fonction définie sur $[a, b]$ par $\forall x \in [a, b]$, $g(x) = f(x) - y$. Alors

$$g(a)g(b) = (f(a) - y)(f(b) - y) < 0.$$

De plus, g est continue sur $[a, b]$ comme somme de fonctions continues. La forme faible du théorème donne l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $g(c) = 0$. Or $g(c) = f(c) - y$, donc c vérifie $f(c) = y$. Ce qui termine la preuve. ☐

Remarque. Ce théorème signifie que si f est continue sur un intervalle I et si f prend deux valeurs distinctes, elle atteint toutes les valeurs (intermédiaires...) comprises entre ces deux réels.



Autrement dit, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

3.2 Théorème des bornes

Théorème (Théorème des bornes)**.**

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$. Alors f admet un maximum et un minimum sur $[a, b]$.

Remarque. Cela signifie également que $m = \min\limits_{[a,b]} f$ et $M = \max\limits_{[a,b]} f$ existent et que

$$f\left([a, b]\right) = [m, M].$$

Autrement dit, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

3.3 Théorème de la bijection

Théorème (Théorème de la bijection)**.**

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors f réalise une bijection de I dans l'intervalle $f(I)$.
Sa réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(I)$, de même sens de variation que f.

Démonstration. (démonstration à connaître, sauf pour la continuité de f^{-1})

1. — f est continue sur I, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires $f(I)$ est un intervalle.
   — f est surjective de I dans $f(I)$ par définition de $f(I)$.
   — f est strictement monotone sur I, donc deux points différents ne peuvent pas avoir la même image par f. Donc f est injective sur I.

   Donc f est bijective de I dans l'intervalle $f(I)$.
   Pour la suite, on suppose que f est strictement croissante sur I (le cas décroissant se traite de la même manière).
2. Soit a et b deux éléments de $f(I)$. Supposons que $f^{-1}(a) \geqslant f^{-1}(b)$, composer par f donne alors $a \geqslant b$. Par passage à la contraposée, on vient de montrer que $a < b \Longrightarrow f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$. Donc f^{-1} est strictement croissante sur $f(I)$.
3. Montrons maintenant que f^{-1} est continue sur $f(I)$. Soit $y_0 \in f(I)$, qui s'écrit $y_0 = f(x_0)$ avec $x_0 \in I$. On suppose que x_0 n'est pas une borne de I (sinon, il suffit de modifier les intervalles considérés dans la suite). Soit $\varepsilon > 0$ tel que $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$. On pose $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ et $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$: y_1 et y_2 sont dans $f(I)$ et vérifient $y_1 < y_0 < y_2$ par croissance de f. On pose $\eta = \min(\frac{y_0 - y_1}{2}, \frac{y_2 - y_0}{2})$. On a alors :

$$|y - y_0| \leqslant \eta \Longrightarrow y_1 < y < y_2 \Longrightarrow x_0 - \varepsilon \leqslant f^{-1}(y) \leqslant x_0 + \varepsilon,$$

   puisque f^{-1} est croissante sur $f(I)$. Donc $\lim\limits_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$. Donc f^{-1} est continue en y_0.

$\square$

Remarque. En particulier, si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et si $b \in f(I)$, alors l'équation $f(x) = b$ admet une unique solution sur I.

Exemple 8. Montrer que l'équation $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ possède une unique solution dans l'intervalle $]2, +\infty[$.
On pose $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ sur $]2, +\infty[$.
C'est une fonction polynomiale donc dérivable sur $]2, +\infty[$, avec $\forall x \in]2, +\infty[$, $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x+2) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $]2, +\infty[$.

f est continue (car polynomiale) et strictement croissante sur $]2, +\infty[$, donc par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $]2, +\infty[$ vers $f(]2, +\infty[)$. Or $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -3$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, donc $f\,(]2, +\infty[) =]-3, +\infty[$.

Comme $0 \in]-3, +\infty[$, il possède un unique antécédent par f, et donc l'équation $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ possède une unique solution dans l'intervalle $]2, +\infty[$.

Proposition.

Si f est une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J, les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple 9. Cas des fonctions exponentielle et logarithme :