Extrema et convexité

Cours de É. Bouchet – ECS1

14 juin 2019

Table des matières

1 Recherche d'extremum

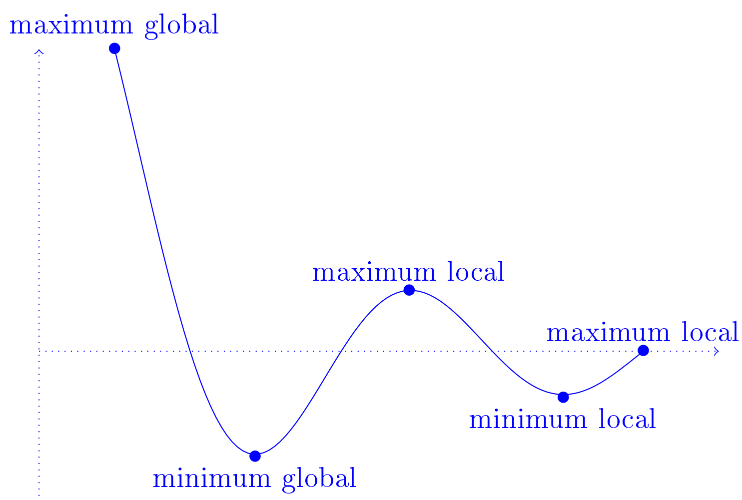
1.1 Quelques rappels

Définition (Extremum local, rappel)**.**

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un ensemble E et $c \in E$.
- On dit que f admet un **maximum local** en c lorsqu'il existe un voisinage V_c de c inclus dans E tel que : pour tout $x \in V_c$, $f(x) \leqslant f(c)$.
- On dit que f admet un **minimum local** en c lorsqu'il existe un voisinage V_c de c, V_c inclus dans E, tel que : pour tout $x \in V_c$, $f(x) \geqslant f(c)$.

Définition (Extremum global, rappel)**.**

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un ensemble E et $c \in E$.
- On dit que f admet un **maximum global** en c lorsque pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant f(c)$.
- On dit que f admet un **minimum global** en c lorsque pour tout $x \in E$, $f(x) \geqslant f(c)$.



1.2 Recherche d'extremum sur un segment

Théorème (Théorème des bornes, rappel)**.**

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Toute fonction continue sur $I = [a, b]$ est bornée et atteint ses bornes.

Remarque. Cela signifie que toute fonction continue sur le segment $I = [a, b]$ admet des extrema globaux sur ce segment.

Remarque. Ce théorème donne l'existence d'extrema, mais ne donne pas de méthode pour les déterminer.

1.3 Recherche d'extremum sur un ouvert

Théorème (Caractérisation d'un extremum, rappel)**.**

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et soit $J =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction dérivable sur J. Si f admet un extremum local en $c \in J$ alors $f'(c) = 0$.

Remarque. ATTENTION : ce résultat est faux si on ne suppose pas que l'intervalle est ouvert.

Exemple 1. On considère la fonction $f : x \longmapsto x^2$ définie sur $[0, 1]$. Elle admet un maximum en 1, est dérivable sur $[0, 1]$ mais $f'(1) = 2 \neq 0$.

Remarque. Il est possible d'avoir $f'(c) = 0$ sans que f n'admette d'extremum en c.

Exemple 2. On considère la fonction $f : x \longmapsto x^3$ définie sur $[-1, 1]$. Elle est dérivable sur $[-1, 1]$, de plus $f'(0) = 0$, mais 0 n'est ni un maximum local, ni un minimum local.

Définition (Point critique)**.**

Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle ouvert J. On dit que $c \in J$ est un **point critique** de f lorsque $f'(c) = 0$.

Remarque. On a donc montré que les extrema locaux d'une fonction de classe C^1 sur un intervalle ouvert sont à chercher parmi ses points critiques.

Remarque. Les extrema locaux d'une fonction de classe C^1 sauf en un nombre fini de points, sur un intervalle quelconque, sont donc à chercher parmi

— ses points critiques,
— les points où la fonction n'est pas dérivable,
— les bornes de l'intervalle.

Théorème.

Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle ouvert I et soit $c \in I$ un point critique de f. Alors,

— Si $f^{(2)}(c) > 0$, alors f possède un minimum local en c.
— Si $f^{(2)}(c) < 0$, alors f possède un maximum local en c.
— Si $f^{(2)}(c) = 0$, on ne peut rien conclure.

Démonstration. (démonstration à connaître) La fonction f est de classe C^2, on peut donc effectuer un développement limité à l'ordre 2 en c : pour h au voisinage de 0,

$$f(c+h) = f(c) + hf'(c) + \frac{h^2}{2} f''(c) + o(h^2).$$

Or c est un point critique de f, donc $f'(c) = 0$, et on a pour h au voisinage de 0 :

$$f(c+h) - f(c) = \frac{h^2}{2} f''(c) + o(h^2).$$

— Si $f^{(2)}(c) > 0$, alors $\frac{h^2}{2} f''(c) + o(h^2) > 0$ pour h au voisinage de 0 et f possède un minimum local en c.

— Si $f^{(2)}(c) < 0$, alors $\frac{h^2}{2}f''(c) + o(h^2) < 0$ pour h au voisinage de 0 et f possède un maximum local en c.
— Si $f^{(2)}(c) = 0$, $f(c+h) - f(c) = o(h^2)$ et on ne peut rien conclure.

□

Exemple 3. Trouver les extrema de la fonction $f : x \longmapsto x^3 - x^2 - x + 1$ définie sur $[-2, \frac{3}{2}]$. Déterminer leur nature, et s'ils sont locaux ou globaux.
Par le théorème des bornes, la fonction est continue sur un segment, donc admet au moins un minimum global et un maximum global (il va falloir les déterminer). La fonction f est de classe C^2 sur son intervalle de définition, donc les extrema sont soit des points critiques, soit des bornes de l'intervalle. On commence par chercher les points critiques : $\forall x \in [-2, \frac{3}{2}]$,

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 \text{ et } f''(x) = 6x - 2.$$

Donc $f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 2x - 1 = 0$. On cherche les racines de ce polynôme : $\Delta = 4 + 4 \times 3 = 16 = 4^2$, donc on a deux racines réelles, qui sont 1 et $-\frac{1}{3}$.
Il y a donc au total quatre points à étudier : 1, $-\frac{1}{3}$, -2 et $\frac{3}{2}$. On commence par calculer leurs images :

$$f(1) = 0, \quad f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{27} \simeq 1,19, \quad f(-2) = -9, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{8} \simeq 0,63.$$

Le minimum global est donc atteint en -2, et le maximum global en $-\frac{1}{3}$.
Il ne reste plus qu'à étudier les deux points restants :

$$f''(1) = 4 > 0.$$

Donc 1 correspond à un minimum local. De plus,

$$f\left(\frac{3}{2} + h\right) - f\left(\frac{3}{2}\right) = hf'\left(\frac{3}{2}\right) + o(h) = \frac{11}{4}h + o(h).$$

C'est négatif à gauche de $\frac{3}{2}$, donc $\frac{3}{2}$ correspond à un maximum local.

2 Fonctions convexes

2.1 Convexité

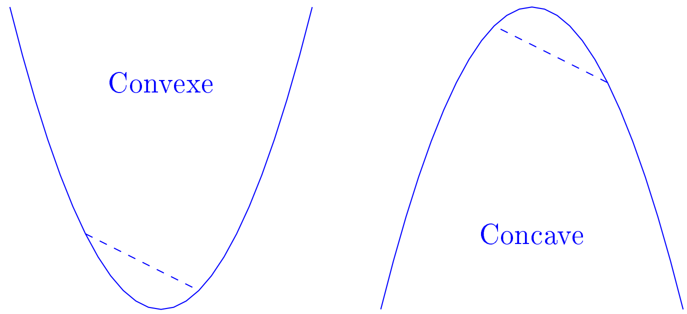
Définition (Fonction convexe, concave)**.**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I non vide et non réduit à un point.
— On dit que la fonction f est **convexe** sur I lorsque $\forall (x_1, x_2) \in I^2$, $\forall (t_1, t_2) \in [0,1]^2$ tels que $t_1 + t_2 = 1$,
$$f(t_1x_1 + t_2x_2) \leqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2).$$
— On dit que la fonction f est **concave** sur I lorsque $\forall (x_1, x_2) \in I^2$, $\forall (t_1, t_2) \in [0,1]^2$ tels que $t_1 + t_2 = 1$,
$$f(t_1x_1 + t_2x_2) \geqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2).$$

Remarque. On peut également écrire que f est convexe lorsque $\forall (x_1, x_2) \in I^2$, $\forall t \in [0,1]$,

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Remarque. Interprétation géométrique : pour $t \in [0,1]$, $y = tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ parcourt le segment d'extrémités $f(x_1)$ et $f(x_2)$, tandis que $y = f(tx_1 + (1-t)x_2)$ parcourt l'arc de courbe de f situé entre ces mêmes points. Donc la courbe représentative d'une fonction convexe (respectivement concave) est en dessous (respectivement au dessus) de ses cordes.



Exemple 4. On admet que le le logarithme est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que pour tout $u \in [1,e]$, $u-1 \leqslant (e-1)\ln(u)$.
On étudie la corde d'extrémités 1 et e : $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$, cette corde a donc une équation du type $y = au + b$ avec $0 = a + b$ et $1 = ae + b$. D'où $y = \frac{u-1}{e-1}$. La concavité donne alors : pour tout $u \in [1,e]$, $\frac{u-1}{e-1} \leqslant \ln(u)$ et donc $u - 1 \leqslant (e-1)\ln(u)$.

Proposition (Lien entre convexité et concavité)**.**

Une fonction f est concave sur un intervalle I si et seulement si $-f$ est convexe sur I.

Démonstration. (démonstration à connaître) On montre que f concave $\Rightarrow -f$ convexe, la réciproque se montre par la même méthode. Soit f une fonction concave sur un intervalle I. Soit $(x_1, x_2) \in I^2$ et $(t_1, t_2) \in [0,1]^2$ tels que $t_1 + t_2 = 1$, alors

$$f(t_1x_1 + t_2x_2) \geqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2),$$

d'où

$$(-f)(t_1x_1 + t_2x_2) \leqslant t_1(-f)(x_1) + t_2(-f)(x_2).$$

Donc $-f$ est convexe sur I. □

Théorème (Généralisation de l'inégalité de convexité)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction définie sur un intervalle I non vide et non réduit à un point. Si f est convexe sur I, alors $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I^n$, $\forall (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in [0,1]^n$ tels que $\sum_{k=1}^n t_k = 1$,

$$f\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^n t_k f(x_k).$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P(n) =$« $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I^n$, $\forall (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in [0,1]^n$ tels que $\sum_{k=1}^n t_k = 1$, $f\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^n t_k f(x_k)$ ».

— $\forall x_1 \in I$, $f(x_1) = f(x_1)$, donc $P(1)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $P(n)$ est vraie. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in I^{n+1}$ et $(t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}) \in [0,1]^{n+1}$ tels que $\sum_{k=1}^{n+1} t_k = 1$. Si $t_{n+1} = 1$, c'est le seul terme non nul et il n'y a rien à montrer. Sinon,

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} t_k x_k\right) = f\left((1-t_{n+1})\frac{\sum_{k=1}^{n} t_k x_k}{1-t_{n+1}} + t_{n+1}x_{n+1}\right) \overset{f \text{ convexe}}{\leqslant} (1-t_{n+1}) f\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} t_k x_k}{1-t_{n+1}}\right) + t_{n+1} f(x_{n+1}).$$

Or, par $P(n)$, comme $\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{1-t_{n+1}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k}{\sum_{k=1}^{n} t_k} = 1$,

$$f\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} t_k x_k}{1-t_{n+1}}\right) \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k)}{1-t_{n+1}}.$$

On obtient $P(n+1)$ en insérant ce résultat dans l'inégalité précédente.

$\square$

Exemple 5. Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. Montrer que $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I^n$,

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

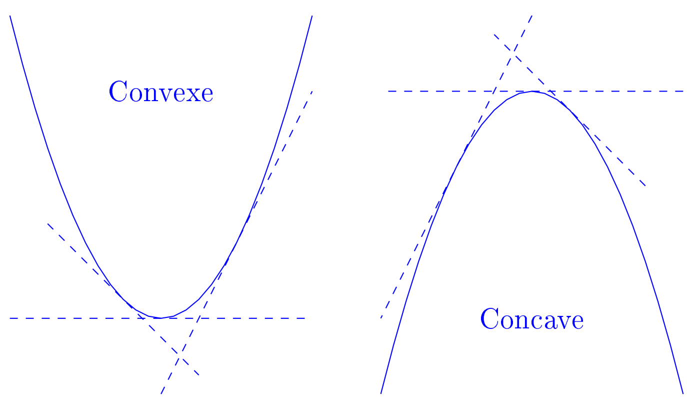
Il suffit de choisir les t_i tous égaux à $\dfrac{1}{n}$, qui sont bien entre 0 et 1 et se somment à 1.

2.2 Convexité et dérivabilité

Théorème (Convexité d'une fonction C^1).

Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle I. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- f est convexe sur I,
- En tout point de I, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de ses tangentes,
- f' est croissante sur I.

Interprétation géométrique :



Exemple 6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x + 1$.
La fonction exponentielle a une dérivée croissante sur $\mathbb{R}$, donc est convexe. Donc elle est au-dessus de sa tangente en 0, d'équation $y = x + 1$.

Exemple 7. Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $x \geqslant \ln(x+1)$.
La fonction $x \longmapsto \ln(x+1)$ a une dérivée $x \longmapsto \frac{1}{x+1}$ décroissante sur $]-1, +\infty[$, donc est concave sur cet intervalle. Donc elle est en dessous de sa tangente en 0, d'équation $y = x$.

Corollaire (Convexité d'une fonction C^2).

Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle I. Alors f est convexe sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$.

Remarque. De même, f est concave sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

2.3 Point d'inflexion

Définition (Point d'inflexion).

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, et $c \in I$. On dit que c est un **point d'inflexion** de f lorsque f'' s'annule et change de signe en ce point.

Remarque. En un point d'inflexion, il y a changement de concavité et la courbe traverse la tangente en ce point.

Exemple 8. Soit $f : x \longmapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que 0 est un point d'inflexion de f.
La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, donc les dérivées première et seconde existent, et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x.$$

Donc $f''(0) = 0$, $f''(x) > 0$ si $x > 0$ et $f''(x) < 0$ si $x < 0$. D'où le résultat.