Fonctions de deux variables

Cours de É. Bouchet – PCSI

27 juin 2022

Table des matières

1 Fonctions de deux variables réelles

1.1 Ouverts

Définition (Boules).

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique. Soit $A \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

- On appelle **boule ouverte** de centre A et de rayon r l'ensemble noté $B(A,r)$ défini par :

$$B(A,r) = \{M \in \mathbb{R}^2 | \, \|A - M\| < r\}.$$

- On appelle **boule fermée** de centre A et de rayon r l'ensemble noté $B_f(A,r)$ défini par :

$$B_f(A,r) = \{M \in \mathbb{R}^2 | \, \|A - M\| \leqslant r\}.$$

Remarque. Il est immédiat que $B(A,r) \subset B_f(A,r)$ et que si $r \leqslant s$, $B(A,r) \subset B(A,s)$.

Définition (Ouvert).

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que D est un **ouvert** si on est dans un des deux cas suivants :

- $D = \emptyset$;
- pour tout point M de D, il existe $r > 0$ tel que $B(M,r) \subset D$.

Exemple 1. Les ensembles de la forme $]a,b[\times]c,d[$ sont des ouverts (faire un dessin).

Exemple 2. Soit $A \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, montrer que la boule ouverte $B(A,r)$ est un ouvert.
Soit $M \in B(A,r)$, alors $\|A - M\| < r$ donc $r' = r - \|A - M\| > 0$ (faire un dessin).
Montrons que $B(M,r') \subset B(A,r)$. Soit $N \in B(M,r')$, alors $\|M - N\| < r'$. D'après l'inégalité triangulaire,

$$\|A - N\| \leqslant \|A - M\| + \|M - N\| < \|A - M\| + r' = \|A - M\| + r - \|A - M\| = r.$$

Donc $N \in B(A,r)$, ce qui donne l'inclusion annoncée. Donc $B(A,r)$ est un ouvert.

Exemple 3. Soit $A \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, montrer que $\overline{B_f(A,r)}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Soit $M \in \overline{B_f(A,r)}$, alors $\|A - M\| > r$ donc $r' = \|A - M\| - r > 0$ (faire un dessin).
Montrons que $B(M,r') \subset \overline{B_f(A,r)}$. Soit $N \in B(M,r')$, alors $\|N - M\| < r'$. D'après l'inégalité triangulaire,

$$\|A - M\| \leqslant \|A - N\| + \|N - M\| ,$$

ce qui entraîne

$$\|A - N\| \geqslant \|A - M\| - \|N - M\| > \|A - M\| - r' = r.$$

Donc $N \in \overline{B_f(A,r)}$, ce qui donne l'inclusion annoncée. Donc $\overline{B_f(A,r)}$ est un ouvert.

Remarque. Soit $A \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, la boule fermée $B_f(A,r)$ n'est par contre pas un ouvert.

1.2 Définition et représentation de fonctions

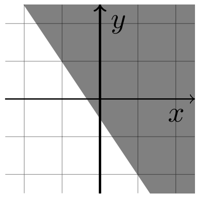
Définition (Fonction de deux variables à valeurs réelles).

On appelle **fonction de deux variables à valeurs réelles** toute fonction f définie sur une partie A de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

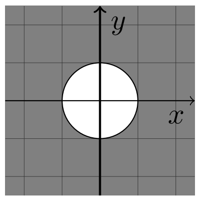
Exemple 4. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : \begin{array}{ccc} E_1 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \ln(3x+2y+1) \end{array}$.

L'ensemble de définition est $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 3x+2y+1 > 0\}$. C'est le demi-plan situé sur le côté droit de la droite $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$:



Exemple 5. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $g : \begin{array}{ccc} E_2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sqrt{x^2+y^2-1} \end{array}$.

L'ensemble de définition est $E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-1 \geqslant 0\}$. Afin de caractériser cet ensemble, on remarque tout d'abord que l'ensemble $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 < 1\}$ est le disque ouvert de centre $(0,0)$ et de rayon 1. L'ensemble E_2 est le complémentaire de D dans $\mathbb{R}^2$:



Exemple 6. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $h : \begin{array}{ccc} E_3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x\ \exp(-x^2-y^2) \end{array}$.

L'ensemble de définition est $E_3 = \mathbb{R}^2$.

Définition.

Une fonction de deux variables est dite **polynomiale** si elle s'écrit comme une combinaison linéaire de fonctions de la forme $(x,y) \mapsto x^m y^n$, avec m et n deux entiers naturels.

Exemple 7. Les fonctions $(x,y) \mapsto x^2+y^2$, $(x,y) \mapsto x^2-y^2$, $(x,y) \mapsto 1-x^2$, $(x,y) \mapsto xy$ sont polynomiales.

Définition (Surface, ligne de niveau)**.**

Soit f une fonction réelle de deux variables définie sur $D_f \subset \mathbb{R}^2$.

— On appelle **surface** de f sa représentation dans l'espace, c'est-à-dire la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par les points (x,y,z) où $(x,y) \in D_f$ et $z = f(x,y)$.
— Si $a \in \mathbb{R}$, on appelle **ligne de niveau** a de f et on note L_f^a l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $f(x,y) = a$.

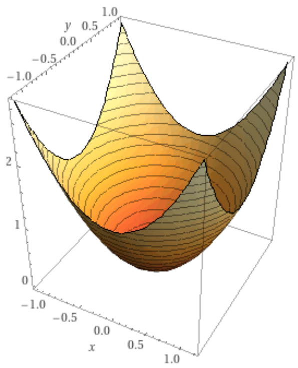
Remarque. Une ligne de niveau est donc l'intersection de S_f et du plan d'équation $z = a$. Réciproquement,

$$S_f = \{L_f^a | a \in \operatorname{Im} f\}.$$

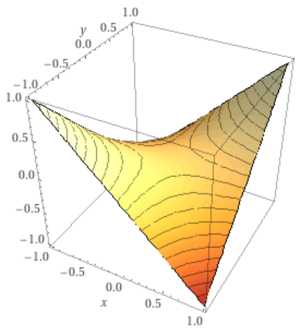
Remarque. Deux lignes de niveau différentes ne se coupent jamais.

Remarque. Le mot ligne ne signifie pas qu'une ligne de niveau est une droite : c'est une courbe.

Exemple 8. La surface associée à la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2+y^2$ a pour lignes de niveau les cercles d'équation $x^2+y^2 = k$, pour $k \in \mathbb{R}_+$.



Exemple 9. La surface associée à la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = xy$ a pour lignes de niveau les courbes d'équation $k = xy$ pour $k \in \mathbb{R}$, donc des morceaux d'hyperboles.



1.3 Continuité

Définition (Limite en un point)**.**

Soit f une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in D$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet pour **limite** ℓ en (x_0, y_0) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 \text{ tel que } \quad \forall (x, y) \in D, \quad \|(x_0, y_0) - (x, y)\| < \eta \Rightarrow |f(x, y) - \ell| < \varepsilon.$$

Remarque. Attention, cette définition n'est valable que pour les ouverts.

Définition (Continuité)**.**

Soit f une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et soit $(x_0, y_0) \in D$. On dit que f est **continue en** (x_0, y_0) si f admet pour limite $f(x_0, y_0)$ en (x_0, y_0), et que f est **continue sur** D si f est continue en tout point de D.

Remarque. Autrement dit, f est continue en (x_0, y_0) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 \text{ tel que } \quad \forall (x, y) \in D, \quad \|(x_0, y_0) - (x, y)\| < \eta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Proposition (Opérations usuelles sur la continuité)**.**

- Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- Soit g une fonction continue sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit φ une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$. Alors la composée $f = \varphi \circ g$ est une fonction continue sur D.
- Toute combinaison linéaire et tout produit de fonctions continues sur un ouvert D sont des fonctions continues sur D. De même pour le quotient si le dénominateur ne s'annule pas.

Démonstration. On revient à la définition... □

Exemple 10. Montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
La fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}^2$, et à valeurs positives. La fonction $u \mapsto \sqrt{u}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Donc par composition, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 11. Montrer que la fonction $g : (x, y) \mapsto \exp(y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
La fonction $(x, y) \mapsto y$ est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}^2$. La fonction $u \mapsto \exp(u)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc par composition, g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 12. Montrer que la fonction $h : (x, y) \mapsto \frac{xy}{1+x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
La fonction $(x, y) \mapsto xy$ est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}^2$. La fonction $(x, y) \mapsto 1 + x^2 + y^2$ est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}^2$, et ne s'annule pas (ses valeurs sont toutes supérieures à 1). Donc h est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2 Dérivées partielles

2.1 Définition

Définition (Applications partielles).

Soit f une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ On appelle **applications partielles** de f au point (x_0, y_0) les fonctions obtenues à partir de f en fixant une variable :

$$f(., y_0) : x \mapsto f(x, y_0) \qquad \text{et} \qquad f(x_0, .) : y \mapsto f(x_0, y).$$

Remarque. Les applications partielles $f(., y_0)$ et $f(x_0, .)$ sont des fonctions réelles d'une variable réelle.

Définition (Dérivées partielles en un point).

Soit $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
On dit que :
- f admet **une dérivée partielle par rapport à** x en (x_0, y_0) lorsque, l'application partielle $f(., y_0)$ est dérivable en x_0. On note cette dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.
- f admet **une dérivée partielle par rapport à** y en (x_0, y_0) lorsque, l'application partielle $f(x_0, .)$ est dérivable en y_0. On note cette dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Remarque. On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Remarque. La notion de dérivée partielle est définie à l'aide de la dérivée d'une fonction réelle à une variable réelle. Les résultats usuels de dérivation peuvent donc être utilisés sur les applications partielles.
Par exemple, si f et g admettent une dérivée partielle selon x en un point alors $f + g$ et $f \times g$ aussi.

Remarque. Attention : l'existence des dérivées partielles en un point n'entraîne pas la continuité de f en ce point.

Exemple 13. Soit f l'application définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Montrer que ses dérivées partielles existent en $(0,0)$, mais qu'elle n'est pas continue en ce point.
Les applications partielles de f en $(0,0)$ valent $x \mapsto 0$ et $y \mapsto 0$. Elles sont donc dérivables (de dérivées nulles), donc les dérivées partielles existent en $(0,0)$.
Par contre, on remarque que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$. Donc $\lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$. La fonction f n'est donc pas continue en $(0,0)$.

Définition (Fonctions dérivées partielles)**.**

Soit f une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dont les dérivées partielles existent en tout point de D. On appelle :

— **dérivée partielle de f par rapport à la variable** x la fonction définie sur D par :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y).$$

— **dérivée partielle de f par rapport à la variable** y la fonction définie sur D par :

$$\frac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Remarque. Contrairement aux applications partielles, les fonctions dérivées partielles sont donc des fonctions réelles de deux variables réelles.

Remarque. Dans l'écriture $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, ne pas confondre le x du ∂ (qui est une notation) avec le x du (x,y) (qui est l'abscisse x du point $(x,y) \in D$). De même avec y.

Définition (Classe C^1)**.**

Soit f une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est **de classe** C^1 sur D si elle admet des dérivées partielles et que ces dérivées partielles sont continues sur D.

Exemple 14. Soit f la fonction définie sur $D =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ par :

$$\forall (x,y) \in D, \quad f(x,y) = \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}.$$

Montrer que f est de classe C^1 sur D.
On fixe $y > 0$. La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, donc f admet une dérivée partielle selon x :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{xy} - \frac{\ln(y)}{x^2}.$$

On fixe $x > 0$. La fonction $y \mapsto \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, donc f admet une dérivée partielle selon y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{xy} - \frac{\ln(x)}{y^2}.$$

Les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur D comme composée (puisque ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$), somme et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues. Donc f est de classe C^1 sur D.

Proposition (Propriétés usuelles de la classe C^1).

- Toute fonction de classe C^1 est continue.
- Toute fonction polynomiale est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
- Soit g une fonction de classe C^1 sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit φ une fonction de classe C^1 de I dans $\mathbb{R}$. Alors $\varphi \circ g$ est une fonction de classe C^1 sur D.
- Toute combinaison linéaire, tout produit, tout quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions de classe C^1 sur un ouvert D sont des fonctions de classe C^1 sur D.

Démonstration. Ces résultats découlent des propriétés de la continuité sur D et de la dérivabilité de fonctions à une variable réelle. □

Remarque. Ces résultats donnent un raccourci pour traiter l'exemple précédent : ils permettent de montrer qu'une fonction est de classe C^1 sans passer par le calcul des dérivées partielles.

2.2 Développement limité à l'ordre 1

Proposition (Développement limité à l'ordre 1).

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in D$. Alors :

$$f(x_0+h, y_0+k) \underset{\|(h,k)\|\to 0}{=} f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k + o(\|(h,k)\|).$$

Démonstration. Hors-programme. □

Remarque. Cette formule donne en particulier :

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) \underset{\|(h,k)\|\to 0}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k + o(\|(h,k)\|).$$

La fonction $(h,k) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k$ représente donc la meilleure approximation linéaire de la fonction $(h,k) \mapsto f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)$ au voisinage de $(0,0)$.

Remarque. Comme dans le cas des fonctions d'une variable réelle, on peut réécrire la formule du développement limité (et ses conséquences) en posant $h = x - x_0$ et $k = y - y_0$, ce qui donne :

$$f(x,y) \underset{\|(x-x_0,y-y_0)\|\to 0}{=} f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + o(\|(x-x_0, y-y_0)\|).$$

Exemple 15. Donner la meilleure approximation linéaire de $(x,y) \mapsto e^{x+y} - 1$ au voisinage de $(0,0)$.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = e^{x+y} - 1$. C'est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x+y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x+y}.$$

En particulier, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. La meilleure approximation linéaire de f au voisinage de $(0,0)$ est donc $(x,y) \mapsto x + y$.

Remarque. Dans le cas des fonctions réelles, on sait que si f est de classe C^1 au voisinage d'un point x_0, alors $f(x) \underset{x\to x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$. L'équation de la droite tangente en (x_0, y_0) à la courbe représentative de f est alors $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
De même dans le cas d'une fonction f de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, l'équation du plan tangent en (x_0, y_0) à la surface représentative de f sera :

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

2.3 Gradient

Définition (Gradient).

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle **gradient de** f la fonction définie de D dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ par :

$$\nabla(f) : (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Remarque. Le développement limité à l'ordre 1 de f au point (x_0, y_0) peut donc aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) &\underset{\|(h,k)\|\to 0}{=} f(x_0,y_0) + \nabla(f)(x_0,y_0)^\top \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(\|(h,k)\|) \\ &\underset{\|(h,k)\|\to 0}{=} f(x_0,y_0) + \langle \nabla(f)(x_0,y_0), (h,k) \rangle + o(\|(h,k)\|). \end{aligned}$$

Remarque. Le gradient de f en (x_0, y_0) définit la direction dans laquelle f croît le plus vite.

3 Dérivées partielles et composées

3.1 Dérivée selon un vecteur

Définition (Dérivée selon un vecteur).

Soit f une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in D$ et u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. On dit que f **admet une dérivée au point** (x_0, y_0) **selon le vecteur** u lorsque $f_u \ : t \mapsto f((x_0,y_0)+tu)$ est dérivable en 0. La dérivée en (x_0, y_0) suivant u vaut alors

$$D_u f(x_0,y_0) = f_u'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((x_0,y_0)+tu) - f(x_0,y_0)}{t}.$$

Remarque. Quand elles existent, les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ correspondent aux dérivées au point (x_0, y_0) selon les vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$.

Remarque. On peut dériver selon tout vecteur non nul, mais on s'intéresse principalement aux dérivées selon des vecteurs unitaires. Cela permet de comparer plus efficacement l'évolution des variations dans les différentes directions.

Remarque. On a vu précédemment qu'une fonction pouvait admettre des dérivées partielles en un point sans être continue. Cette nouvelle définition ne lève malheureusement pas le problème : une fonction peut admettre des dérivées en (x_0, y_0) selon tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$ sans être continue en (x_0, y_0).

Exemple 16. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Soit $u = (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Alors si $a \neq 0$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(a,b)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2b^2}{t^2a} = \frac{b^2}{a}.$$

Si $a = 0$, on trouve de même $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f((0,0)+t(a,b)) - f(0,0)}{t} = 0$. Donc f admet une dérivée en $(0,0)$ selon tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$.

Cependant, $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x^2, x) = \lim\limits_{x\to 0_+} 1 = 1 \neq 0 = f(0,0)$, donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

Proposition.

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in D$ et u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Alors la fonction f possède une dérivée en (x_0, y_0) selon le vecteur u et on a :

$$D_u f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), u \rangle \,.$$

Démonstration. Comme f est de classe C^1 sur D, elle admet un développement limité d'ordre 1 en (x_0, y_0) :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{\|(h,k)\| \to 0}{=} f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\|(h, k)\|).$$

En particulier, si on note (a, b) les coordonnées du vecteur u,

$$f(x_0 + ta, y_0 + tb) \underset{t \to 0}{=} f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)ta + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)tb + o(\|(ta, tb)\|),$$

et donc par opérations sur les négligeabilités :

$$\frac{f(x_0 + ta, y_0 + tb) - f(x_0, y_0)}{t} \underset{t \to 0}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)b + o(\|(a, b)\|).$$

Un passage à la limite pour $t \to 0$ donne alors le résultat annoncé : f possède une dérivée en (x_0, y_0) selon le vecteur u et $D_u f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)b = \langle \nabla f(x_0, y_0), u \rangle$. $\square$

Exemple 17. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2y$. Déterminer sa dérivée en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ selon le vecteur $u = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.
f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, donc les dérivées partielles et selon le vecteur u existent. Un calcul donne :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 2.$$

On en déduit que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $D_u f(x, y) = 2x \times \frac{\sqrt{2}}{2} + (3y^2 - 2) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}x + \frac{3}{2}\sqrt{2}y^2 - \sqrt{2}$.

3.2 Règles de composition

Proposition (Règle de la chaîne).

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit x et y deux fonctions de classe C^1 sur $I \subset \mathbb{R}$ et telles que $\forall t \in I$, $(x(t), y(t)) \in D$. Alors $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :

$$\forall t \in I, \quad \frac{d}{dt}\left(f(x(t), y(t))\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t).$$

Démonstration. Soit $t \in I$ et h au voisinage de 0. Comme f est de classe C^1 sur D, elle admet un développement limité d'ordre 1 en $(x(t), y(t))$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h} \\
&\underset{h \to 0}{=} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\left(x(t+h) - x(t)\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\left(y(t+h) - y(t)\right) + o(\|x(t+h) - x(t), y(t+h) - y(t)\|)}{h} \\
&\underset{h \to 0}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{x(t+h) - x(t)}{h} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\frac{y(t+h) - y(t)}{h} + o\left(\frac{\|x(t+h) - x(t), y(t+h) - y(t)\|}{h}\right)
\end{aligned}$$

Or x et y sont dérivables en t, donc le membre de droite admet une limite finie quand $h \to 0$. Donc $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est dérivable au point étudié et un passage à la limite donne :

$$\frac{d}{dt}\left(f(x(t), y(t))\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) + 0.$$

Cette expression est celle d'une fonction continue sur I, par opérations sur les fonctions continues. Donc la fonction $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est bien de classe C^1 sur I, ce qui termine la démonstration. □

Remarque. Soit γ l'arc défini sur $\mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. La formule de dérivation de la chaîne s'écrit aussi :

$$(f \circ \gamma)'(t) = \left\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \right\rangle,$$

où $\gamma'(t)$ est défini par $(x'(t), y'(t))$. On peut l'interpréter comme la dérivée de f le long de l'arc γ.

Remarque. Le gradient de f en un point est orthogonal à la ligne de niveau de f passant par ce point.
En effet, pour $k \in \mathbb{R}$, si on paramétrise la ligne de niveau d'équation $f(x, y) = k$ par un arc γ (on admet l'existence d'un tel paramétrage), on obtient : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(\gamma(t)) = k$. La fonction $f \circ \gamma$ étant constante, elle est dérivable de dérivée nulle, et la formule de la remarque précédente donne alors :

$$0 = \left\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \right\rangle.$$

Cela montre bien que le gradient est orthogonal au vecteur tangent.

Exemple 18. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2y$. En utilisant la règle de la chaîne, étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}_+$ de $h : t \mapsto f(\sqrt{t}, t^2)$.
On a déjà vu que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 2.$$

De plus, $t \mapsto \sqrt{t}$ et $t \mapsto t^2$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et on connaît leurs dérivées. Donc h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et d'après la règle de la chaîne,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(t) = 2(\sqrt{t}) \times \frac{1}{2\sqrt{t}} + (3(t^2)^2 - 2) \times 2t = 1 + 6t^5 - 4t.$$

Rmq : si l'énoncé n'avait pas imposé l'utilisation de la règle de la chaîne, on aurait pu commencer par simplifier l'expression de h : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $h(t) = t + t^6 - 2t^2$, ce qui permet de retrouver rapidement la valeur de la dérivée.

Proposition.

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert D_1 de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit φ et ψ deux fonctions de classe C^1 sur un ouvert D_2 de $\mathbb{R}^2$ et telles que $\forall (u, v) \in D_2$, $(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \in D_1$.
Alors $g\ : (u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ est de classe C^1 sur D_2 et $\forall (u, v) \in D_2$,

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\varphi(u, v), \psi(u, v))\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial \psi}(\varphi(u, v), \psi(u, v))\frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v),$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\varphi(u, v), \psi(u, v))\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial \psi}(\varphi(u, v), \psi(u, v))\frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v).$$

Remarque. Ici, $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ représente la dérivée de f par rapport à la première variable et $\frac{\partial f}{\partial \psi}$ celle par rapport à la seconde variable. Cela permet d'écrire en version raccourcie :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\varphi, \psi)\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial \psi}(\varphi, \psi)\frac{\partial \psi}{\partial u} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\varphi, \psi)\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial \psi}(\varphi, \psi)\frac{\partial \psi}{\partial v}.$$

Démonstration. On montre l'existence de la première dérivée partielle et sa valeur. La deuxième formule se traite de la même manière et la classe C^1 découle des deux résultats.
Soit $(u_0, v_0) \in D_2$ La fonction partielle $u \mapsto f(\varphi(u, v_0), \psi(u, v_0))$ est dérivable en u_0 d'après la règle de la chaîne. Donc $\frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0)$ existe et :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0))\frac{d}{du}(\varphi(u, v_0))(u_0) + \frac{\partial f}{\partial \psi}(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0))\frac{d}{du}(\psi(u, v_0))(u_0).$$

En revenant aux définitions des dérivées partielles, on en déduit bien le résultat annoncé :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0))\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial \psi}(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0))\frac{\partial \psi}{\partial u}(u_0, v_0).$$

□

Exemple 19. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\varphi(u, v) = u\cos(v)$ et $\psi(u, v) = u\sin(v)$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^3 - y$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $g(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$. En utilisant la formule de composée, déterminer ses dérivées partielles.
Toutes les fonctions considérées sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et des calculs directs donnent :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = \cos(v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = -u\sin(v), \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) = \sin(v), \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) = u\cos(v), \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -1.$$

La formule de dérivée de la composée donne alors :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = 3(u\cos(v))^2\cos(v) - \sin(v) = 3u^2\cos^3(v) - \sin(v),$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = 3(u\cos(v))^2(-u\sin(v)) - u\cos(v) = -3u^3\cos^2(v)\sin(v) - u\cos(v).$$

4 Extremums

Définition (Extremum global ou local)**.**

Soit f une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $(x_0, y_0) \in D$.

— On dit que f admet un **maximum local** en (x_0, y_0) si il existe un réel $r > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in B((x_0, y_0), r), \quad f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0).$$

Le maximum est **global** si l'inégalité est vraie pour tout $(x, y) \in D$.

— On dit que f admet un **minimum local** en (x_0, y_0) si il existe un réel $r > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in B((x_0, y_0), r), \quad f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0).$$

Le minimum est **global** si l'inégalité est vraie pour tout $(x, y) \in D$.

Exemple 20. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $f(x, y) \geqslant 0 = f(0, 0)$. Donc f admet un minimum global au point $(0, 0)$.

Définition (Point critique)**.**

Soit f une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et admettant des dérivées partielles sur D. On dit que $(x_0, y_0) \in D$ est un **point critique** de f lorsque :

$$\nabla(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

autrement dit lorsque $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Proposition (Condition nécessaire d'extremum local)**.**

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in D$. Si f admet un extremum local en (x_0, y_0), alors (x_0, y_0) est un point critique de f.

Démonstration. On suppose que f admet un extremum local en (x_0, y_0). Alors les applications partielles $f(., y_0)$ et $f(x_0, .)$ admettent aussi des extremums locaux, respectivement en x_0 et y_0.
Or ce sont des fonctions d'une variable réelle, dérivables aux points considérés (qui ne sont pas des bornes de l'intervalle de définition). Donc leurs dérivées s'annulent respectivement en x_0 et y_0, ce qui donne bien $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Donc (x_0, y_0) est un point critique de f. □

Remarque. Comme pour les fonctions d'une variable réelle, c'est une condition nécessaire mais pas suffisante.

Exemple 21. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f : (x, y) \mapsto xy$. Montrer que $(0, 0)$ est un point critique de f, puis que f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$.
La fonction f est polynomiale donc admet des dérivées partielles et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x.$$

Cela donne directement $\nabla(f)(0, 0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, donc $(0, 0)$ est un point critique de f.
Par ailleurs, comme $f(0, 0) = 0$,

$$\forall x > 0, \quad f(x, -x) = -x^2 < f(0, 0) < x^2 = f(x, x).$$

donc f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$.

Exemple 22. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - x$. Étudier ses extremums.
La fonction f est polynomiale donc admet des dérivées partielles et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

La fonction f admet donc $(\frac{1}{2}, 0)$ comme unique point critique. On a $f(\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$. De plus, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x \geqslant x^2 - x \geqslant -\frac{1}{4} = f\left(\frac{1}{2}, 0\right),$$

où la dernière inégalité est obtenue par étude sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^2 - x$. Donc f admet un minimum global en $(\frac{1}{2}, 0)$, qui vaut $-\frac{1}{4}$.