Généralités sur les fonctions réelles

Cours de É. Bouchet – PCSI

2 décembre 2022

Table des matières

De nombreux résultats seront admis dans ce chapitre pour être démontrés plus tard dans l'année. Les ensembles considérés dans ce chapitre sont tous des ensembles de réels et les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1 Généralités

1.1 Règles de calcul, représentation graphique

Définition 1.1 (Somme, produit, quotient)

Soit f et g deux fonctions définies sur un ensemble E.
- On note $f+g$ la fonction qui à tout $x \in E$ associe $f(x)+g(x)$.
- On note $f \times g$ la fonction qui à tout $x \in E$ associe $f(x) \times g(x)$.
- Si g ne s'annule pas sur E, on note $\frac{f}{g}$ la fonction qui à tout $x \in E$ associe $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Définition 1.2 (Composée, rappel)

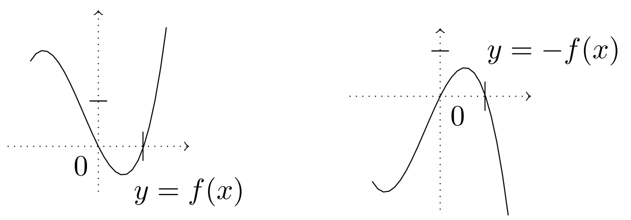
Soit D_f, A_f, D_g et A_g des ensembles non vides. Soit f une application définie de D_f dans A_f et g une application définie de D_g dans A_g. Si $A_f \subset D_g$, on appelle **composée** de f par g, notée $g \circ f$, l'application définie de D_f dans A_g par :

$$\forall x \in D_f, \quad g \circ f(x) = g\left(f(x)\right).$$

Proposition 1.3 (Symétrie des représentations graphiques)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E.
La fonction $x \mapsto f(-x)$ est définie sur $\{-x | x \in E\}$ et sa représentation graphique se déduit de celle de f par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
La fonction $x \mapsto -f(x)$ est définie sur E et sa représentation graphique se déduit de celle de f par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

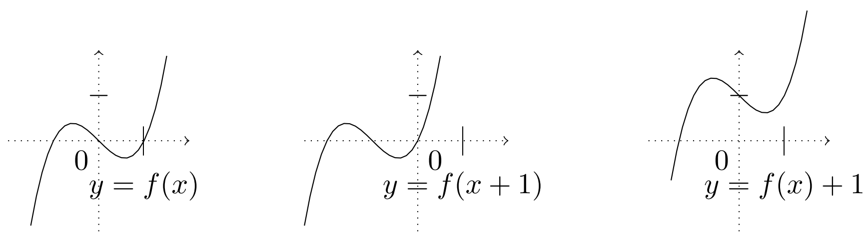
Exemple 1.



Proposition 1.4 (Translation des représentations graphiques)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E et $a \in \mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto f(x+a)$ est définie sur $\{x-a | x \in E\}$ et sa représentation graphique se déduit de celle de f par translation de vecteur $-a\vec{i}$, où $\vec{i}$ dirige l'axe des abscisses.
La fonction $x \mapsto f(x)+a$ est définie sur E et sa représentation graphique se déduit de celle de f par translation de vecteur $a\vec{j}$, où $\vec{j}$ dirige l'axe des ordonnées.

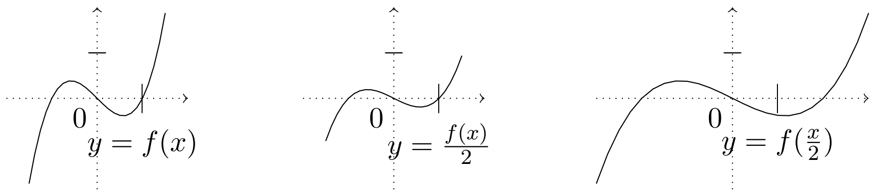
Exemple 2.



Proposition 1.5 (Dilatation/contraction des représentations graphiques)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E et $a \in \mathbb{R}_+^*$
La fonction $x \mapsto f(ax)$ est définie sur $\{\frac{x}{a} | x \in E\}$ et sa représentation graphique se déduit de celle de f par une dilatation/contraction horizontale de rapport multiplicatif a.
La fonction $x \mapsto af(x)$ est définie sur E et sa représentation graphique se déduit de celle de f par une dilatation/contraction verticale de rapport multiplicatif a.

Exemple 3.



1.2 Parité, périodicité et symétries

Définition 1.6 (Fonction paire, impaire)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E centré en 0.
- On dit que f est **paire** lorsque $\forall x \in E,\ f(-x) = f(x)$.
- On dit que f est **impaire** lorsque $\forall x \in E,\ f(-x) = -f(x)$.

Remarque. Un ensemble E centré en 0 assure que $x \in E \iff -x \in E$, donc que tous les termes sont bien définis.

Proposition 1.7 (Parité et symétries)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E centré en 0.
- Si f est une fonction paire, alors sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si f est une fonction impaire, alors sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

Exemple 4. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$ est paire, alors que $x \mapsto x^3$ est impaire.

Remarque. Si une fonction est paire ou impaire, on peut donc se contenter de l'étudier sur une moitié d'ensemble de définition, et déduire ensuite le comportement général.

Définition 1.8 (Fonction périodique)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E. On dit que f est **périodique** quand il existe un réel T non nul tel que :

$$x \in E \iff x + T \in E \quad \text{et} \quad \forall x \in E, \quad f(x+T) = f(x).$$

On dit alors que f est T-périodique, et le réel T est appelé une **période** de f.

Remarque. Une fonction peut avoir plusieurs périodes différentes.

Exemple 5. Les fonction sin et cos sont périodiques de période 2π, 4π, 6π...

Remarque. Si une fonction est périodique de période T, on peut donc se contenter de l'étudier sur un ensemble de taille T, et déduire ensuite le comportement général.

1.3 Bornes

Définition 1.9 (Majorant, minorant)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E.

— f est **majorée** lorsqu'il existe un réel M (appelé **majorant**) tel que $\forall x \in E,\ f(x) \leqslant M$.

— f est **minorée** lorsqu'il existe un réel m (appelé **minorant**) tel que $\forall x \in E,\ f(x) \geqslant m$.

— f est **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée.

Définition 1.10 (Maximum, minimum)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E, et $x_0 \in E$.

— f admet un **maximum** en x_0 lorsque $\forall x \in E,\ f(x) \leqslant f(x_0)$. On note $f(x_0) = \max\limits_{x \in E} f(x)$.

— f admet un **minimum** en x_0 lorsque $\forall x \in E,\ f(x) \geqslant f(x_0)$. On note $f(x_0) = \min\limits_{x \in E} f(x)$.

Proposition 1.11 (Bornes et valeur absolue)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E. La fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

Démonstration. On procède en deux temps :

— Supposons que $|f|$ est majorée. Alors $\exists K \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in E,\ |f(x)| \leqslant K$. Donc $\forall x \in E,\ -K \leqslant f(x) \leqslant K$ et f est bornée.

— Supposons que f est bornée. Alors $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in E,\ m \leqslant f(x) \leqslant M$.
On pose $K = \max(|m|, |M|)$. Donc $\forall x \in E,\ -K \leqslant -|m| \leqslant m \leqslant f(x) \leqslant M \leqslant |M| \leqslant K$. Donc $\forall x \in E$, $|f(x)| \leqslant K$, donc $|f|$ est majorée.

□

1.4 Monotonie

Définition 1.12 (Fonction croissante)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E.

— On dit que f est une fonction **croissante** sur E lorsque pour tout $(a, b) \in E^2$,

$$a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \leqslant f(b).$$

— On dit que f est une fonction **strictement croissante** sur E lorsque pour tout $(a, b) \in E^2$,

$$a < b \Longrightarrow f(a) < f(b).$$

Définition 1.13 (Fonction décroissante)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E.

— On dit que f est une fonction **décroissante** sur E lorsque pour tout $(a, b) \in E^2$,

$$a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \geqslant f(b).$$

— On dit que f est une fonction **strictement décroissante** sur E lorsque pour tout $(a, b) \in E^2$,

$$a < b \Longrightarrow f(a) > f(b).$$

Définition 1.14 (Fonction monotone)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E. On dit que f est une fonction **monotone** sur E lorsque f est croissante ou décroissante sur E, et que f est **strictement monotone** sur E si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur E.

Proposition 1.15 (Composée de fonctions monotones)

Soit f et g deux fonctions monotones sur les ensembles E et $f(E)$ respectivement. Alors $g \circ f$ est monotone sur E, et :

- Si f et g ont le même sens de variation, alors $g \circ f$ est croissante sur E.
- Si f et g ont des sens de variation opposés, alors $g \circ f$ est décroissante sur E.

Démonstration. On traite ici deux des quatre cas, les autres se gèrent par la même méthode :

- Si f et g sont croissantes sur E et $f(E)$:
  Soit a et b des éléments de E tels que $a \leqslant b$. On a $a \leqslant b$, donc $f(a) \leqslant f(b)$, puis $g(f(a)) \leqslant g(f(b))$.
  Donc $g \circ f$ est croissante sur E.
- Si f est croissante sur E et g décroissante sur $f(E)$:
  Soit a et b des éléments de E tels que $a \leqslant b$. On a $a \leqslant b$, donc $f(a) \leqslant f(b)$, puis $g(f(a)) \geqslant g(f(b))$.
  Donc $g \circ f$ est décroissante sur E.

□

Remarque. On ne peut par contre absolument rien dire sur le produit de deux fonctions croissantes.

Exemple 6. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -1$ et $g(x) = -e^{-x}$.
Les fonctions f et g sont croissantes sur $\mathbb{R}$ (f est même constante). Par contre, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(fg)(x) = e^{-x}$ donc le produit fg est décroissant sur $\mathbb{R}$.

2 Dérivation

2.1 Dérivabilité en un point, fonction dérivée

Définition 2.1 (Fonction dérivable en un point, nombre dérivé)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E et $x_0 \in E$. On dit que f est **dérivable** en x_0 lorsque $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.

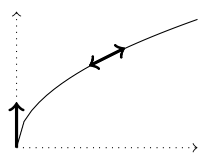
Cette limite s'appelle **nombre dérivé** de f en x_0, elle est notée $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ ou $f'(x_0)$.

Proposition 2.2 (Tangente à la courbe)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E et $x_0 \in E$. Si f est dérivable en x_0, alors la courbe représentative de f admet au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ une tangente d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Remarque. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$ alors f n'est pas dérivable en x_0 et la courbe représentative de f admet une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

Exemple 7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $x \mapsto \sqrt{x}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a donc les tangentes :



Définition 2.3 (Fonction dérivée)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E. On dit que la fonction f est **dérivable** sur E lorsque f est dérivable en tout point de E. On définit alors la **fonction dérivée** de f notée f' ou $\frac{df}{dx}$, définie sur E par $f' : x \mapsto f'(x)$.

Remarque. On peut utiliser la notation $\frac{d}{dx}(f(x))$ à la place de $f'(x)$. La notation $(f(x))'$ est par contre interdite !

2.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Ces résultats sont seulement rappelés ici, on les démontrera dans un chapitre ultérieur.

Proposition 2.4 (Linéarité)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un ensemble E et α un réel. La fonction $\alpha u + v$ est dérivable sur E, et $(\alpha u + v)' = \alpha u' + v'$.

Proposition 2.5 (Dérivée d'un produit et d'un quotient)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un ensemble E.
La fonction uv est dérivable sur E, et $(uv)' = u'v + uv'$.
Si de plus v ne s'annule pas, alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur E, et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Proposition 2.6 (Dérivée d'une composée)

Soient f une fonction dérivable sur un ensemble E et g une fonction dérivable sur $f(E)$. La fonction $g \circ f$ est dérivable sur E, et $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$.

2.3 Formulaire

Les dérivées classiques suivantes sont à connaître, on y ajoutera ensuite celles des nouvelles fonctions présentées dans ce chapitre.

$\forall x \in E_f, f(x) =$	E_f	$E_{f'}$	$\forall x \in E_{f'}, f'(x) =$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$
k (constante)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$ ($n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$)	$\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^*$)	$\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^*$)	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$1 + \tan^2(x)$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, on obtient par composition (en précisant les conditions de validité) les formules suivantes, classiques également :

fonction du type	dérivée
e^u	$u'e^u$
$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$
u^α	$\alpha u'u^{\alpha-1}$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$

Exercice 8. Trouver les ensembles de dérivabilité des fonctions suivantes et donner l'expression des dérivées :

1. f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \cos(3x) + 2\sin(x)$.
2. f_2 définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_2(x) = 2\sqrt{x^3}$.
3. f_3 définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\},\ f_3(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$.

<u>Solution :</u>

1. f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1'(x) = -3\sin(3x) + 2\cos(x)$.
2. f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_2'(x) = 2\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3}} = \dfrac{3x^2}{\sqrt{x^3}} = 3\sqrt{x}$ car $x \geqslant 0$.
3. f_3 est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\},\ f_3'(x) = \dfrac{2x(x-2)-(x^2+1)}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2-4x-1}{(x-2)^2}$.

Remarque. Ces formulaires permettent aussi de lever certaines formes indéterminées de limites du type "$\frac{0}{0}$", en forçant l'apparition de taux d'accroissements.

Exercice 9. En utilisant un taux d'accroissement, déterminer la limite de $\dfrac{\sin(x)}{x}$ pour $x \to 0$.

<u>Solution :</u> Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Comme sin est dérivable en 0, $\dfrac{\sin(x)}{x} = \dfrac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \sin'(0) = \cos(0) = 1$.

2.4 Étude pratique d'une fonction

Proposition 2.7 (Variations de fonctions dérivables)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors :

— f est croissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$.
— f est décroissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0$.
— f est constante sur I si et seulement si : $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.

Démonstration. Ce résultat sera démontré dans un chapitre ultérieur. □

Remarque. Attention, ce résultat ne fonctionne que sur des intervalles, pas pour n'importe quel ensemble.

Exemple 10. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{1}{x}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \leqslant 0$, pourtant f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$. Elle est « seulement » décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque. On peut adapter le résultat pour montrer la stricte monotonie : soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$,

— Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.

— Plus généralement, si pour tout $x \in J$, $f'(x) > 0$, où J est l'intervalle I auquel on a retiré un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I (Cette propriété peut même s'appliquer s'il existe un nombre fini de points où f n'est pas dérivable).

Exercice 11. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geqslant 1 + x$.
<u>Solution :</u> On pose g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \exp(x) - 1 - x$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \exp(x) - 1.$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $g'(x) \leqslant 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) \geqslant 0$. De plus, $g(0) = e^0 - 1 = 0$. On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Donc g admet un minimum en 0 qui vaut 0, donc g est à valeurs positives. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geqslant x + 1$.

Exercice 12. Montrer que $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1 + x) \leqslant x$.
<u>Solution :</u> On pose h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \ln(1+x) - x$. Elle est dérivable sur $]-1, +\infty[$, et

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}.$$

Donc $\forall x \in]-1, 0]$, $h'(x) \geqslant 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $h'(x) \leqslant 0$. De plus, $h(0) = \ln(1) - 0 = 0$. On en déduit le tableau de variations :

x	-1		0		$+\infty$
$h'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$\|\|$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

Donc h admet un maximum en 0 qui vaut 0, donc h est à valeurs négatives. Donc $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1 + x) \leqslant x$.

Variante (si on a déjà montré l'inégalité sur exponentielle). Soit $x \in]-1, +\infty[$, la stricte croissance du ln sur $\mathbb{R}_+^*$ donne :

$$\exp(x) \geqslant 1 + x \iff \ln(\exp(x)) \geqslant \ln(1 + x) \iff x \geqslant \ln(1 + x).$$

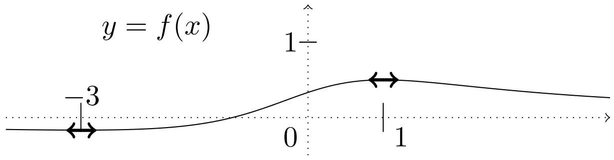
Exercice 13. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{x+1}{x^2+3}$ et tracer sa représentation graphique. En déduire un majorant et un minorant sur $\mathbb{R}$.
<u>Solution :</u> f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1(x^2+3) - 2x(x+1)}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2+3-2x^2-2x}{(x^2+3)^2} = -\frac{x^2+2x-3}{(x^2+3)^2} = -\frac{(x-1)(x+3)}{(x^2+3)^2}$$

(la factorisation s'est effectuée par calcul de discriminant : $\Delta = 4+12 = 16$ d'où les racines $\frac{-2+4}{2} = 1$ et $\frac{-2-4}{2} = -3$)
Or $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x^2+3} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x^2+3}$, $f(-3) = \frac{-2}{9+3} = -\frac{1}{6}$ et $f(1) = \frac{2}{1+3} = \frac{1}{2}$. On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{6}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Donc f est minorée par $-\frac{1}{6}$, majorée par $\frac{1}{2}$ et on peut tracer sa courbe représentative :



Remarque. Étudier la courbe est souvent plus long que de majorer/minorer un quotient/produit, mais les majorants et minorants obtenus sont plus précis, puisqu'il s'agit de maximums et minimums.

2.5 Cas des fonctions réciproques

Proposition 2.8 (Symétrie de f et f^{-1})

Si f est une bijection d'un ensemble E dans $f(E)$, les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

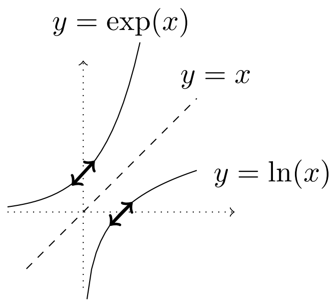
Proposition 2.9 (Dérivée de la fonction réciproque)

Soit f une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle I et à valeurs dans $J = f(I)$. Soit $a \in I$. La fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$. Lorsqu'elle est dérivable :

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration. Cette formule sera montrée dans un chapitre ultérieur, mais on peut remarquer que les hypothèses garantissent la bijectivité : f est injective car strictement monotone sur I et surjective car à valeurs dans $f(I)$. $\square$

Exemple 14. Ces propriétés s'observent bien dans le cas des fonctions exponentielle et logarithme :



On retrouve de plus la dérivabilité du logarithme en utilisant celle de l'exponentielle : exp est une fonction bijective strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, de réciproque ln. On sait que exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x) \neq 0$. Sa réciproque ln est donc dérivable sur l'ensemble de son ensemble de définition et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$

2.6 Dérivées d'ordre supérieur

Définition 2.10 (Fonction de classe C^1)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E. On dit que f est **de classe** C^1 sur E lorsque f est dérivable sur E et que sa dérivée f' est continue sur E.

Exemple 15. Les fonctions polynômes, exponentielle, cosinus et sinus sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Définition 2.11 (Dérivées successives)

Soit f une fonction définie sur un ensemble E.
— On définit $f^{(0)} = f$.
— Soit $p \in \mathbb{N}$, si $f^{(p)}$ est bien définie et dérivable sur E alors f est $(p+1)$ fois dérivable sur E, avec pour tout $x \in E$, $f^{(p+1)}(x) = \left(f^{(p)}\right)'(x)$.

Exemple 16. Soit $p \in \mathbb{N}$. Alors la fonction exponentielle est p fois dérivable et $\exp^{(p)} = \exp$.

Remarque. Les règles de calcul sont les mêmes que pour la dérivée classique, il suffit de les répéter p fois de suite.

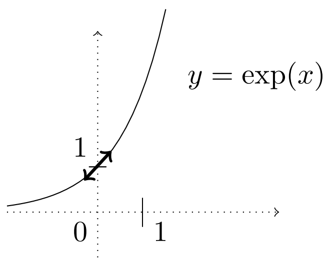
3 Fonctions usuelles

3.1 Exponentielle, logarithme

Proposition 3.1 (Variations de l'exponentielle, rappels)

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$	1	$+$	
$\exp(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

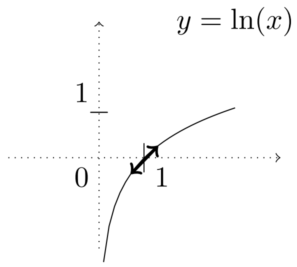


Démonstration. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x) > 0$. Elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. □

Proposition 3.2 (Variations du logarithme népérien, rappels)

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, de variations :

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x)$	$\|\|$	$+$	1	$+$	
$\ln(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Démonstration. La fonction logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$. Elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. □

Définition 3.3 (Logarithme en base a)

Soit $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. La fonction **logarithme en base** a, notée $\log_a$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Remarque. Comme $\ln(e) = 1$, la fonction ln est la fonction logarithme en base e.

Remarque. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout réel y, la stricte monotonie de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ donne :

$$y = \log_a(x) \iff y\ln(a) = \ln(x) \iff e^{y\ln(a)} = x.$$

Autrement dit, la fonction $\log_a$ est bijective et sa fonction réciproque est $y \mapsto e^{y\ln(a)}$. Par analogie avec les puissance usuelles, on écrira $e^{y\ln(a)} = e^{\ln(a^y)} = a^y$ (cette notation sera justifiée formellement dans la section suivante).

Exemple 17. La fonction logarithme en base 10 est définie pour $x > 0$ par $\log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.
Il s'agit de la fonction réciproque de $y \mapsto 10^y$, donc $\forall y \in \mathbb{R}$, $\log_{10}(10^y) = y$, et $\forall x > 0$, $10^{\log_{10}(x)} = x$.
Ces relations seront notamment très utiles dans les autres matières scientifiques.

Proposition 3.4 (Inégalités classiques)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) \geqslant 1 + x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]1,+\infty[, \quad \ln(1+x) \leqslant x.$$

Démonstration. Ces formules ont déjà été montrées dans les exemples 11 et 12. □

3.2 Puissances et croissances comparées

Définition 3.5 (Puissance non entière)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $x > 0$, on peut définir le nombre x^α par la formule $x^\alpha = e^{\ln(x^\alpha)} = e^{\alpha.\ln(x)}$.

Remarque. Si $x \leqslant 0$, le logarithme n'est pas défini et donc x^α non plus.

Remarque. Cette définition prolonge la définition habituelle des puissances : si $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$,

$$e^{n\ln(x)} = e^{\ln(x)+\ln(x)+\ldots+\ln(x)} = e^{\ln(x)}e^{\ln(x)}\ldots e^{\ln(x)} = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x = x^n,$$

puisque les sommes et produits contiennent à chaque fois n termes.

Remarque. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

Proposition 3.6 (Règles de calcul sur les puissances)

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, alors :

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, \qquad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}.$$

Démonstration. Il suffit de revenir à la définition et d'utiliser les propriétés d'exponentielle et logarithme :

$$(xy)^\alpha = \exp(\alpha \ln(xy)) = \exp(\alpha \ln(x) + \alpha \ln(y)) = \exp(\alpha \ln(x)) \exp(\alpha \ln(y)) = x^\alpha y^\alpha.$$

$$x^{\alpha+\beta} = \exp((\alpha+\beta) \ln(x)) = \exp(\alpha \ln(x) + \beta \ln(x)) = \exp(\alpha \ln(x)) \exp(\beta \ln(x)) = x^\alpha x^\beta.$$

$$(x^\alpha)^\beta = \exp(\beta \ln(x^\alpha)) = \exp(\beta\alpha \ln(x)) = x^{\alpha\beta}.$$

□

Proposition 3.7 (Dérivée des puissances non entières)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha . x^{\alpha-1}$.

Démonstration. La fonction $x \mapsto \exp(\alpha \ln(x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables, et les formules de dérivation de la composée donnent :

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha \ln'(x) \cdot \exp'(\alpha \ln(x)) = \frac{\alpha}{x} \exp(\alpha \ln(x)) = \alpha x^{-1} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

□

Remarque. Cette formule prolonge les formules de dérivation des puissances entières. Elle ne s'applique par contre que lorsque la valeur de α est constante.

Proposition 3.8 (Variations des fonctions puissances)

Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x \mapsto x^\alpha$ est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$, de variations :

Cas $\alpha > 0$:

x	0		1		$+\infty$
$\alpha x^{\alpha-1}$	‖	$+$	α	$+$	
x^α	‖ 0	↗	1	↗	$+\infty$

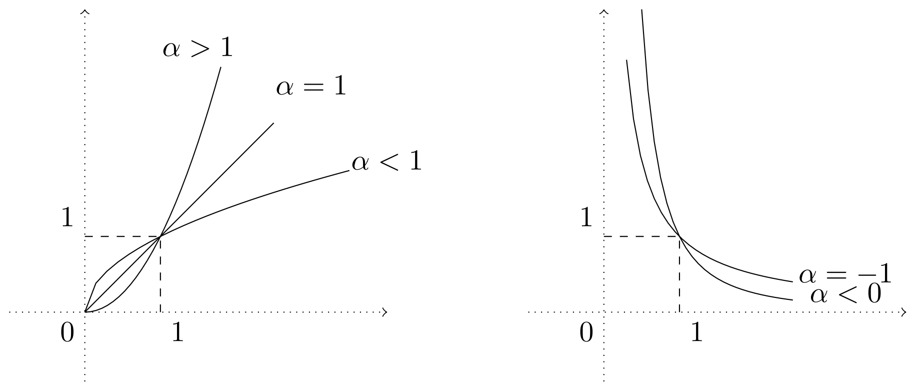
Cas $\alpha < 0$:

x	0		1		$+\infty$
$\alpha x^{\alpha-1}$	‖	$-$	α	$-$	
x^α	‖ $+\infty$	↘	1	↘	0

Remarque. Le cas $\alpha = 0$ correspond à la fonction constante égale à 1.

Démonstration. Découle directement du signe de la dérivée, obtenue dans le résultat précédent. □

Remarque. Cela permet de tracer les représentations graphiques $y = x^\alpha$:



Remarque. Dans le cas $\alpha > 0$, on peut prolonger la courbe en 0 avec la convention $0^\alpha = 0$.

Proposition 3.9 (Croissances comparées)

Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0^+, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0^+, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha (\ln x)^\beta = 0.$$

Remarque. Cette dernière limite découle directement de la précédente. En effet, poser $y = \frac{1}{x}$ donne :

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha (\ln x)^\beta = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y^\alpha} \ln\left(\frac{1}{y}\right)^\beta = \lim_{y\to+\infty} \frac{(-\ln(y))^\beta}{y^\alpha} = 0.$$

Exercice 18. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(x) - x)$.

Solution : Les croissances comparées ne s'appliquent qu'aux produits, on force donc une factorisation :

$$\lim_{x\to+\infty} (\ln(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln(x)}{x} - 1\right) = -\infty \text{ puisque les croissances comparées donnent } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

3.3 Fonctions circulaires réciproques

Définition 3.10 (Arc tangente)

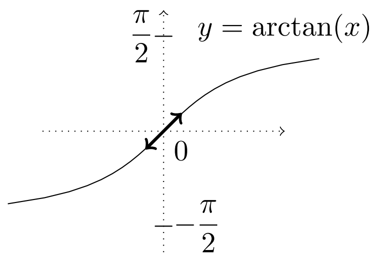
La restriction de la fonction tangente à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est une bijection strictement croissante de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est appelée **arc tangente**, et est notée arctan.

Démonstration. La fonction tangente est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, de dérivée $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2 > 0$, donc elle est strictement croissante sur cet intervalle. Elle est donc injective sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Comme $\tan\left(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right) = \mathbb{R}$, la fonction tangente est bijective de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. Donc la bijection réciproque existe bien, d'où la preuve de l'existence. $\square$

Remarque. Autrement dit, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \tan(\theta) = x \iff \theta = \arctan(x)$.

Remarque. Les propriétés de la réciproque nous permettent de déduire le tableau de variations et la courbe de arctan :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$



Proposition 3.11 (Dérivée de arc tangente)

La fonction arc tangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Démonstration. On utilise la formule de la dérivée de la réciproque : tangente est dérivable et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et sa dérivée ne s'annule jamais. Donc arc tangente est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$, et : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan(\arctan(x))^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$\square$

Définition 3.12 (Arc sinus)

La restriction de la fonction sinus à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est une bijection strictement croissante de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$. Sa bijection réciproque est appelée **arc sinus**, et est notée arcsin.

Démonstration. La fonction sinus est dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, de dérivée $\sin'(x) = \cos(x) > 0$ (sauf en $-\frac{\pi}{2}$ et en $\frac{\pi}{2}$ où la dérivée s'annule), donc elle est strictement croissante sur cet intervalle. Elle est donc injective sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Comme $\sin\left([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\right) = [-1, 1]$, la fonction sinus est bijective de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$. Donc la bijection réciproque existe bien, d'où la preuve de l'existence. $\square$

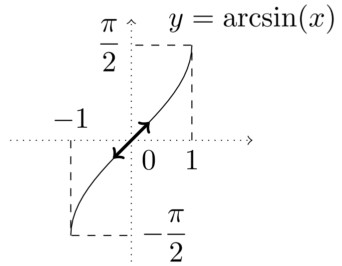
Remarque. Autrement dit, $\forall x \in [-1, 1]$, $\forall \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(\theta) = x \iff \theta = \arcsin(x)$.

De façon générale, si l'on se fixe un $x \in [-1, 1]$, alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin(\theta) = x \iff \begin{cases} \theta \equiv \arcsin(x)[2\pi] \\ \text{ou} \\ \theta \equiv \pi - \arcsin(x)[2\pi] \end{cases}$.

Exercice 19. Déterminer $\arcsin(\sin(-\frac{5\pi}{6}))$.
Solution : La réponse n'est pas $-\frac{5\pi}{6}$ puisque arcsin prend ses valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Par contre (et ça se voit bien sur le cercle trigonométrique), $\arcsin(\sin(-\frac{5\pi}{6})) = \arcsin(\sin(-\frac{\pi}{6})) = -\frac{\pi}{6}$.

Remarque. Les propriétés de la réciproque nous permettent de déduire le tableau de variations et la courbe de arcsin :

x	-1		0		1
$\arcsin(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$



Proposition 3.13 (Dérivée de arc sinus)

La fonction arc sinus est dérivable sur $]-1, 1[$ et vérifie : $\forall x \in]-1, 1[$, $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Démonstration. On utilise la formule de la dérivée de la réciproque : sinus est dérivable et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Sa dérivée s'annule seulement en $-\frac{\pi}{2}$ et en $\frac{\pi}{2}$. Donc arc sinus est dérivable sur $\sin\left(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right) =]-1, 1[$, et : $\forall x \in]-1, 1[$,

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

où on pouvait utiliser la relation $\cos(y) = \sqrt{1 - \sin^2(y)}$ puisque $y = \arcsin(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc $\cos(y) \geqslant 0$. $\square$

Définition 3.14 (Arc cosinus)

La restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$ est une bijection strictement décroissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Sa bijection réciproque est appelée **arc cosinus**, et est notée arccos.

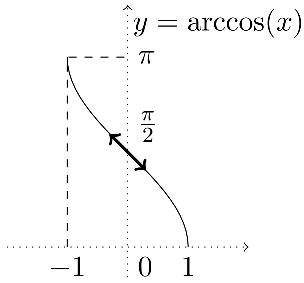
Démonstration. La fonction cosinus est dérivable sur $[0, \pi]$, de dérivée $\cos'(x) = -\sin(x) < 0$ (sauf en 0 et en π où la dérivée s'annule), donc elle est strictement décroissante sur cet intervalle. Elle est donc injective sur $[0, \pi]$. Comme $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$, la fonction cosinus est bijective de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Donc la bijection réciproque existe bien, d'où la preuve de l'existence. $\square$

Remarque. Autrement dit, $\forall x \in [-1,1]$, $\forall \theta \in [0,\pi]$, $\cos(\theta) = x \iff \theta = \arccos(x)$.

De façon générale, si l'on se fixe un $x \in [-1,1]$, alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) = x \iff \begin{cases} \theta \equiv \arccos(x)[2\pi] \\ \text{ou} \\ \theta \equiv -\arccos(x)[2\pi] \end{cases}$.

Remarque. Les propriétés de la réciproque nous permettent de déduire le tableau de variations et la courbe de arccos :

x	-1	0	1
$\arccos(x)$	π	$\frac{\pi}{2}$	0



Proposition 3.15 (Dérivée de arc cosinus)

La fonction arc cosinus est dérivable sur $]-1,1[$ et vérifie : $\forall x \in]-1,1[$, $\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Démonstration. On utilise la formule de la dérivée de la réciproque : cosinus est dérivable et strictement décroissante sur $[0,\pi]$. Sa dérivée s'annule seulement en 0 et en π. Donc arc cosinus est dérivable sur $\cos(]0,\pi[) =]-1,1[$, et : $\forall x \in]-1,1[$,

$$\arccos'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

où on pouvait utiliser la relation $\sin(y) = \sqrt{1-\cos^2(y)}$ puisque $y = \arccos(x) \in]0,\pi[$, donc $\sin(y) \geqslant 0$. □

3.4 Fonctions hyperboliques

Définition 3.16 (Cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique)

Les fonctions **cosinus hyperbolique** et **sinus hyperbolique**, notée respectivement ch et sh, sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Proposition 3.17 (Dérivabilité des fonctions hyperboliques)

Les fonctions ch et sh dérivables sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$.

Démonstration. Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ par somme et composée de fonctions dérivables, et les formules de dérivée donnent :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}'(x) = \frac{e^x + (-1)e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}'(x) = \frac{e^x - (-1)e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x).$$

□

Proposition 3.18 (Variations des fonctions hyperboliques)

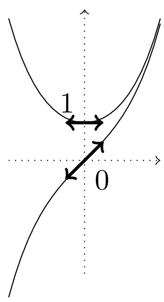
Les variations de ch et sh sont données par les tableaux suivants :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{ch}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}'(x)$		$+$	1	$+$	
$\mathrm{sh}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Démonstration. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}'(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} > 0$, donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\mathrm{sh}(0) = \frac{e^0-e^0}{2} = 0$. On complète le tableau de variations de sh avec $\mathrm{sh}'(0) = \mathrm{ch}(0) = \frac{e^0+e^0}{2} = 1$ et avec les limites (qui s'obtiennent par calcul direct).
L'étude de sh permet d'en déduire son signe, et de montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $\mathrm{ch}'(x) < 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{ch}'(x) > 0$. Donc ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Les valeurs particulières de ch(0) et sh(0), ainsi que les limites, permettent de compléter le tableau. $\square$

Remarque. Cela permet de tracer les représentations graphiques associées :



Proposition 3.19 (Relation classique entre ch et sh)

Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.$$

Démonstration. Un calcul direct donne, grâce aux propriétés de l'exponentielle :
$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{(e^{2x}+e^{-2x}+2e^xe^{-x}) - (e^{2x}+e^{-2x}-2e^xe^{-x})}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$
$\square$

Remarque. Cette relation est l'analogue hyperbolique de la relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.