Intégrales sur un intervalle quelconque

Cours de É. Bouchet – ECS1

9 avril 2021

Table des matières

1 Intégration sur un intervalle semi-ouvert

1.1 Convergence de l'intégrale d'une fonction continue sur $[a, b[$

Définition.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b[$, où $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ **converge** si $\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt$ existe et est finie. On pose alors $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt$.

Remarque. Lorsque l'intégrale ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

Remarque. Lorsqu'on intègre sur un intervalle $[a, b[$, on dit que l'intégrale est *impropre* en b.

Exemple 1. Existence et valeur de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$.

La fonction $t \to \frac{1}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. Soit $x \in [1, +\infty[$.

$$\int_1^x \frac{1}{t^2}dt = \left[\frac{-1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x}.$$

Or $\lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$. Donc l'intégrale converge, et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt = 1$.

Exemple 2. Existence et valeur de $\int_0^1 \frac{1}{1-t}dt$

La fonction $t \to \frac{1}{1-t}$ est continue sur $[0, 1[$, donc l'intégrale est impropre en 1. Soit $x \in [0, 1[$.

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}dt = [-\ln(|1-t|)]_0^x = -\ln(1-x).$$

Or $\lim_{x \to 1} -\ln(1-x) = +\infty$. Donc l'intégrale diverge.

Exemple 3. Existence et valeur de $\int_0^1 \frac{1-t^4}{1-t}dt$

La fonction $t \to \frac{1-t^4}{1-t}$ est continue sur $[0, 1[$, donc l'intégrale est impropre en 1. Soit $x \in [0, 1[$.

$$\int_0^x \frac{1-t^4}{1-t}dt = \int_0^x (1 + t + t^2 + t^3)dt = \left[t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4}\right]_0^x = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}.$$

Or $\lim_{x \to 1} x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$. Donc l'intégrale converge, et $\int_0^1 \frac{1-t^4}{1-t}dt = \frac{25}{12}$.
Remarque : $t \to \frac{1-t^4}{1-t}$ est prolongeable par continuité en 1, ce qui assure la convergence ici. On parle dans ce cas d'intégrale faussement impropre.

1.2 Intégrales de référence

Proposition (Intégrale de Riemann).

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, et on a alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{1}{\alpha - 1}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$, et on a alors $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{1}{1-\alpha}$.

Démonstration. (démonstration à connaître) La fonction $t \to \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc les intégrales sont impropres en $+\infty$ et 0 respectivement. Soit $(x, y) \in]0, +\infty[^2$,

- Si $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_x^y \frac{1}{t}dt = [\ln(t)]_x^y = \ln(y) - \ln(x)$. Donc :
  - Si $x = 1$ et $y \to +\infty$, cela diverge.
  - Si $x \to 0$ et $y = 1$, cela diverge.

  Et aucune des deux intégrales ne converge dans le cas $\alpha = 1$.
- Si $\alpha \neq 1$, $\displaystyle\int_x^y \frac{1}{t^\alpha}dt = \int_x^y t^{-\alpha}dt = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_x^y = \frac{y^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Donc :
  - Si $x = 1$ $\displaystyle\int_1^y \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{y^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$. Ce terme converge quand $y \to +\infty$ si et seulement si $1 - \alpha < 0$, et dans le cas convergent $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{-1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$.
  - Si $y = 1$, $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{1 - x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Ce terme converge quand $x \to 0$ si et seulement si $1 - \alpha > 0$, et dans le cas convergent $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{1}{1-\alpha}$.

  Ce qui correspond aux résultats annoncés.

□

Remarque. Les résultats de convergence restent vrais pour les intégrales $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{t^\alpha}dt$ ou $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ si $x \in]0, +\infty[$.

Corollaire.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et $a < b$ des réels.

Les intégrales $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}dt$ et $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}dt$ convergent si et seulement si $\alpha < 1$.

Démonstration. On montre le résultat pour la première intégrale, la deuxième se gère de la même façon. La fonction $t \to \frac{1}{(b-t)^\alpha}$ est continue sur $[a, b[$, donc l'intégrale est impropre en b. Soit $x \in [a, b[$, on utilise le changement de variables affine $u = b - t$:

$$\int_a^x \frac{1}{(b-t)^\alpha}dt = \int_{b-a}^{b-x} \frac{1}{u^\alpha}(-du) = \int_{b-x}^{b-a} \frac{1}{u^\alpha}du.$$

La convergence ou divergence de l'intégrale lorsque x tend vers b est alors assurée par le résultat précédent sur les intégrales de Riemann impropres en 0. □

Proposition.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-\alpha t)dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$, et vaut alors $\dfrac{1}{\alpha}$.

Démonstration. (démonstration à connaître) La fonction $t \to \exp(-\alpha t)$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. Soit $x \in [0, +\infty[$.

— Si $\alpha = 0$, $\displaystyle\int_0^x \exp(-\alpha t)dt = \int_0^x 1dt = [t]_0^x = x$, qui diverge pour $x \to +\infty$.

— Si $\alpha \neq 0$, on a par contre :

$$\int_0^x \exp(-\alpha t)dt = \left[\frac{\exp(-\alpha t)}{-\alpha}\right]_0^x = \frac{1 - \exp(-\alpha x)}{\alpha}.$$

Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \exp(-\alpha x)}{\alpha} \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \alpha > 0$, d'où la condition annoncée de convergence de l'intégrale. Cette limite vaut de plus $\dfrac{1}{\alpha}$ dans le cas convergent. D'où le résultat.

$\square$

1.3 Règles de calcul sur les intégrales convergentes

Remarque. Contrairement au cas des séries, ce n'est pas parce qu'une intégrale converge que la fonction intégrée doit tendre vers 0 au point considéré.

Proposition (Linéarité)**.**

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b[$, où $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent, alors $\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\, dt$ converge, et

$$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\, dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$$

Démonstration. Soit $x \in [a, b[$. Les fonctions f et g sont continues sur $[a, x]$ et la linéarité de l'intégrale sur un segment donne :

$$\int_a^x (\lambda f(t) + g(t))\, dt = \lambda \int_a^x f(t)dt + \int_a^x g(t)dt.$$

Comme on a supposé que $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent, le membre de droite de cette égalité admet une limite finie quand x tend vers b. L'intégrale du membre de gauche converge donc et un passage à la limite dans l'égalité donne :

$$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\, dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$$

$\square$

Proposition (Relation de Chasles).

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, c[$, où $-\infty < a < c \leqslant +\infty$ et soit $b \in [a, c[$. L'intégrale $\int_b^c f(t)dt$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_a^c f(t)dt$ converge, et on a alors :

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt.$$

Démonstration. Ce résultat s'obtient par passage à la limite après application de la relation de Chasles sur un segment où f est continue. $\square$

Proposition (Croissance de l'intégrale).

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b[$, où $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. On suppose que les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent. Si pour tout $x \in [a, b[$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors

$$\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt.$$

Démonstration. Ce résultat s'obtient par passage à la limite après application de la croissance de l'intégrale sur un segment où f et g sont continues. $\square$

Remarque. En particulier, si l'intégrale d'une fonction positive converge, elle est positive.

2 Techniques de calcul

2.1 Intégration par parties

L'intégration par partie est pratiquée sur des intégrales de fonctions continues sur un segment. On passe ensuite à la limite.

Exemple 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir par récurrence la convergence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \exp(-t)dt$, et montrer que cette intégrale vaut $n!$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \to t^n \exp(-t)$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc l'intégrale I_n est impropre en $+\infty$.
On pose $P(n) =$« I_n converge et vaut $n!$ ».

— $I_0 = \int_0^{+\infty} \exp(-t)dt$ converge et vaut 1 (intégrale de référence). Donc $P(0)$ est vraie.
— Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose $P(n)$. Soit $x \in [0, +\infty[$. Les fonctions $t \to t^{n+1}$ et $t \to -\exp(-t)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, on obtient donc par intégration par parties :

$$\int_0^x t^{n+1} \exp(-t)dt = \left[-t^{n+1} \exp(-t)\right]_0^x + \int_0^x (n+1)t^n \exp(-t)dt = -x^{n+1} \exp(-x) + (n+1) \int_0^x t^n \exp(-t)dt.$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^{n+1} \exp(-x) = 0$ par croissances comparées, donc lorsque x tend vers $+\infty$, le membre de droite converge vers $(n+1)I_n = (n+1)n! = (n+1)!$ par $P(n)$. Donc I_{n+1} converge, et $I_{n+1} = (n+1)!$: $P(n+1)$ est vrai.

D'où le résultat.

2.2 Changement de variables

Le changement de variables non affine est pratiqué sur des intégrales de fonctions continues sur un segment. On passe ensuite à la limite.

Exemple 5. Existence et valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$. On effectuera le changement de variable $t = \sin(u)$.

La fonction $t \to \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0,1[$, donc l'intégrale est impropre en 1. Soit $x \in [0,1[$. Pour étudier $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$, on effectue le changement de variable $t = \sin(u)$ (de classe C^1 et bijective sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ à valeurs dans $[0,1[$), avec $dt = \cos(u)du$. On note y un antécédent de x dans $[0, \frac{\pi}{2}[$:

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^y \frac{\cos(u)}{\sqrt{1-(\sin(u))^2}}du = \int_0^y \frac{\cos(u)}{|\cos(u)|}du = \int_0^y 1du = y.$$

Or y tend vers $\frac{\pi}{2}$ quand x tend vers 1. Donc l'intégrale converge et vaut $\frac{\pi}{2}$.

Le changement de variables affine peut lui être pratiqué directement sur les intégrales impropres.

3 Cas des fonctions positives

Proposition (Cas d'une fonction continue, positive et d'intégrale nulle)**.**

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b[$, où $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge et vaut 0 alors la fonction f est nulle sur $[a,b[$, c'est-à-dire $\forall x \in [a,b[,\ f(x) = 0$.

Remarque. Attention à ne pas oublier les hypothèses « continue et positive » pour appliquer ce résultat.

Proposition (Condition nécessaire et suffisante de convergence)**.**

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b[$, où $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est majorée sur $[a,b[$.

Démonstration. La fonction f est continue sur $[a,b[$, donc $g : x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est bien définie sur $[a,b[$. Comme c'est la primitive de f qui s'annule en a, g est dérivable sur $[a,b[$ et $\forall x \in [a,b[,\ g'(x) = f(x) \geqslant 0$. Donc g est croissante sur $[a,b[$.
Le théorème de la limite monotone donne alors : g admet une limite finie en b si et seulement si g est majorée sur $[a,b[$. Ce qui nous donne exactement le résultat souhaité. □

Exemple 6. Convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\exp(-t)}{t^2}dt$.

La fonction $t \to \frac{\exp(-t)}{t^2}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$, donc l'intégrale est impropre en $+\infty$, et d'après le résultat précédent, il nous suffit de montrer que la fonction $x \to \int_1^x \frac{\exp(-t)}{t^2}dt$ est majorée sur $[1,+\infty[$. Soit $x \in [1,+\infty[$,

$$\int_1^x \frac{\exp(-t)}{t^2}dt \leqslant \int_1^x \frac{e^{-1}}{t^2}dt \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{e^{-1}}{t^2}dt = e^{-1}.$$

En effet, $\forall t \in [1,x]$, $\exp(-t) \leqslant e^{-1}$ (par décroissance de $t \to \exp(-t)$ sur $\mathbb{R}$), donc la croissance de l'intégrale (avec $1 \leqslant x$) donne la première inégalité. La positivité de la fonction intégrée et la convergence de l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ assurent la suite. La fonction $x \to \int_1^x \frac{\exp(-t)}{t^2}dt$ est bornée, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\exp(-t)}{t^2}dt$ converge.

4 Théorèmes de convergence

4.1 Comparaison de fonctions positives

Proposition (Cas où $f \leqslant g$, f et g positives au voisinage de b)**.**

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b[$, où $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. On suppose qu'au voisinage de b, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.
Si l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge également.
Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ diverge vers $+\infty$, l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ diverge également.

Remarque. Attention, la convergence ne signifie pas nécessairement que $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$.

Exemple 7. Convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3+1}dt$.

La fonction $t \to \frac{1}{t^3+1}$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
Soit $t \in [1, +\infty[$, alors $0 \leqslant \frac{1}{t^3+1} \leqslant \frac{1}{t^3}$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}dt$ est une intégrale de Riemann convergente. Donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3+1}dt$ converge.

Proposition (Cas où $f \sim g$, f et g positives au voisinage de b)**.**

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b[$, où $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. On suppose qu'au voisinage de b, g est positive et que $f(x) \sim_b g(x)$. Alors l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge.

Exemple 8. Convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{(1+t^2)}}dt$.

La fonction $t \to \frac{1}{t\sqrt{(1+t^2)}}$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. On a $\frac{1}{t\sqrt{(1+t^2)}} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^2} \geqslant 0$, or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est une intégrale de Riemann convergente, donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{(1+t^2)}}dt$ converge également.

Proposition (Cas où $f = o(g)$, g positive au voisinage de b)**.**

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b[$, où $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. On suppose qu'au voisinage de b, g est positive, que $f(x) =_b o(g(x))$ et que $\int_a^b g(t)dt$ converge. Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge.

Remarque. Attention, les négligeabilités ne permettent jamais de montrer la divergence d'une intégrale, elles ne peuvent être utilisées que pour montrer une convergence.

Exemple 9. Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-u^2)du$.

La fonction $u \to \exp(-u^2)$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. Les croissances comparées donnent $\lim_{u\to+\infty} u^2 \exp(-u^2) = 0$, donc $\exp(-u^2) =_{+\infty} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$. Or la fonction $u \to \frac{1}{u^2}$ est positive sur $\mathbb{R}_+$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}du$ est une intégrale de Riemann convergente, donc $\int_0^{+\infty} \exp(-u^2)du$ converge également.
Remarque : changer la borne non-impropre de l'intégrale au moment de l'application du théorème ne pose pas de problème. En effet, le théorème donne ici la convergence de $\int_1^{+\infty} \exp(-u^2)du$, mais comme $\int_0^1 \exp(-u^2)du$ converge (c'est une intégrale de fonction continue sur un segment), la relation de Chasles nous permet ensuite de conclure.

4.2 Convergence absolue

Définition (Convergence absolue)**.**

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b[$, où $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ **converge absolument** si $\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge.

Proposition.

Toute fonction continue sur un intervalle I est la différence de deux fonctions continues sur I et positives.

Démonstration. Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tout $x \in I$, on pose :

$$f_+(x) = \max(f(x),0) \text{ et } f_- = \max(-f(x),0).$$

On a vu dans les travaux de rentrée que pour tous réels a et b, $\max(a,b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$ (raisonnement par séparation des cas). Donc en particulier $f_+(x) = \frac{f(x)+|f(x)|}{2}$ et $f_-(x) = \frac{-f(x)+|f(x)|}{2}$. La valeur absolue étant continue sur $\mathbb{R}$, f_+ et f_- sont continues sur I. Elles sont de plus positives par construction et on a :

$$f = f_+ - f_-.$$

(car pour tout $x \in I$, si $f(x) \geqslant 0$, $f_+(x)-f_-(x) = f(x)-0 = f(x)$, et si $f(x) \leqslant 0$, $f_+(x)-f_-(x) = 0-(-f(x)) = f(x)$). Cela termine la preuve. □

Théorème (Convergence absolue implique convergence)**.**

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b[$, où $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. On suppose que $\int_a^b f(t)dt$ converge absolument. Alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.

Démonstration. (démonstration à connaître) On utilise la décomposition fournie par le résultat précédent : $f = f_+ - f_-$, où $f_+(x) = \max(f(x),0)$ et $f_- = \max(-f(x),0)$. Par hypothèse, l'intégrale de f converge absolument, donc $\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge. On a de plus les inégalités

$$0 \leqslant f_+ \leqslant |f| \text{ et } 0 \leqslant f_- \leqslant |f|$$

les intégrales $\int_a^b f_+(t)dt$ et $\int_a^b f_-(t)dt$ sont donc convergentes. Par linéarité des intégrales convergentes, $\int_a^b f(t)dt$ converge, avec :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f_+(t)dt - \int_a^b f_-(t)dt.$$

□

Exemple 10. Soit $n \in \mathbb{N}$, étudier la convergence de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t)(\cos(t))^n dt$.

La fonction $t \to \exp(-t)(\cos(t))^n$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc l'intégrale est impropre en $+\infty$, et $\forall t \in [0,+\infty[$,

$$0 \leqslant |\exp(-t)(\cos(t))^n| = |\exp(-t)|\,|(\cos(t))|^n \leqslant \exp(-t).$$

Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp(-t)dt$ est convergente. Donc I_n converge absolument. Donc I_n converge.

5 Intégrales sur un intervalle quelconque

Définition.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $]a,b[$, où $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ **converge** lorsque qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_c^x f(t)dt$ et $\displaystyle\lim_{x\to a}\int_x^c f(t)dt$ existent et sont finies. On pose alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to a}\int_x^c f(t)dt + \lim_{x\to b}\int_c^x f(t)dt.$$

Remarque. D'après la relation de Chasles, la valeur de c n'a aucune incidence sur la convergence ou la valeur de l'intégrale. Si cela converge pour un c, cela converge pour tous.

Exemple 11. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tdt$.

La fonction $t \to t$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale existe et est impropre en $+\infty$ et en $-\infty$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} tdt$ diverge (intégrale de Riemann avec $\alpha = -1$). Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tdt$ diverge également.

Remarque : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-x}^{x} tdt = 0$, mais cela ne permet pas de conclure, il faut étudier séparément les convergences en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exemple 12. Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\exp(-t)dt$.

La fonction $t \to t^{x-1}\exp(-t)$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc l'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$.

— Étude de $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\exp(-t)dt$. On a $\displaystyle\lim_{t\to 0} e^{-t} = 1$, et donc :

$$t^{x-1}\exp(-t) \sim_0 t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}.$$

Ces fonctions sont positives et continues au voisinage de 0_+, donc on peut appliquer le critère d'équivalence et les intégrales $\int_0^1 t^{x-1}\exp(-t)dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}dt$ ont la même nature. Or par critère de convergence des intégrales de Riemann, $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}dt$ converge si et seulement si $1-x<1$, et donc si et seulement si $x>0$.
Donc $\int_0^1 t^{x-1}\exp(-t)dt$ converge si et seulement si $x>0$.

— Étude de $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}\exp(-t)dt$. Par croissances comparées, on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2t^{x-1}e^{-t} = \lim_{t\to+\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0$, et donc

$$t^{x-1}e^{-t} =_{+\infty} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Ces fonctions sont positives et continues au voisinage de $+\infty$ et $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ est une intégrale de Riemann convergente. Donc par critère de négligeabilité, $\int_1^{+\infty} t^{x-1}\exp(-t)dt$ est une intégrale convergente (et ce quel que soit $x\in\mathbb{R}$).

— Conclusion : l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1}\exp(-t)dt$ converge si et seulement si les deux intégrales étudiées convergent, c'est-à-dire si et seulement si $x>0$.

Exemple 13. Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

La fonction $t \to \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc l'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$. On étudie donc la convergence de $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$ et de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

— $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$ est faussement impropre en 0 car $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1 \in \mathbb{R}$. Donc $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.
  Variante : $\frac{\sin(t)}{t} \sim_0 1 \geqslant 0$ et $\int_0^1 1 dt$ converge, donc $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

— On étudie ensuite $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$. La fonction intégrée n'est pas positive au voisinage de $+\infty$, on commence donc par vérifier si l'intégrale converge absolument.
  $\forall t \geqslant 1$, $\left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \leqslant \frac{1}{t}$, mais $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ est une intégrale de Riemann divergente, ce qui ne nous permet pas de conclure. L'intégrale n'est en fait pas absolument convergente (même si on ne l'a pas montré).

— On tente alors une autre stratégie. Soit $x > 1$. Les fonctions $t \to \frac{1}{t}$ et $t \to -\cos(t)$ sont de classe C^1 sur $[1, x]$, et une intégration par parties donne :

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt.$$

  Or $\forall x > 1$, $\left|\frac{\cos(x)}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x}$, donc par théorème d'encadrement $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$. De plus, $\forall t \geqslant 1$, $0 \leqslant \left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$, et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est une intégrale de Riemann convergente, donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ converge absolument (ce qui garantit sa convergence). Donc le membre de droite de l'égalité précédente admet une limite finie en $+\infty$, ce qui signifie que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

— Conclusion : l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est donc convergente.