Intégration

Cours de É. Bouchet – ECS1

28 janvier 2021

Table des matières

1 Primitive d'une fonction sur un intervalle **2**
1.1 Définition et premières propriétés . . . 2
1.2 Opérations sur les primitives . . . 2
1.3 Primitives usuelles à connaître . . . 3

2 Intégrale d'une fonction **3**
2.1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment . . . 3
2.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle . . . 6

3 Propriétés des intégrales **7**
3.1 Fonction définie par une intégrale . . . 7
3.2 Intégrales et relation d'ordre . . . 8
3.3 Passage à la limite . . . 10
3.4 Intégration par parties . . . 10
3.5 Changement de variable . . . 11

4 Sommes de Riemann **12**
4.1 Définition . . . 13
4.2 Cas des fonctions de classe C^1 . . . 13
4.3 Cas des fonctions continues . . . 14
4.4 Interprétation géométrique . . . 14

1 Primitive d'une fonction sur un intervalle

1.1 Définition et premières propriétés

Définition (Primitive)**.**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Une fonction F est **une primitive** de f sur l'intervalle I lorsque F est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$,

$$F'(x) = f(x).$$

Proposition (Condition suffisante d'existence d'une primitive)**.**

Si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors f admet au moins une primitive sur cet intervalle I.

Proposition (Ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle)**.**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, F une primitive de f sur l'intervalle I et G une fonction définie sur I. Alors G est une primitive de f sur I si et seulement si $G - F$ est une fonction constante sur I.

Démonstration. On a :

— Si G est une primitive de f sur I, alors G est dérivable sur I et $G - F$ est dérivable sur I par somme de fonctions dérivables. Sa dérivée est $f - f = 0$. Et donc, par propriété de monotonie des fonctions dérivables sur un intervalle, $G - F$ est une fonction constante sur I.

— Réciproquement, on suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, $(G - F)(x) = a$. Alors $\forall x \in I$, $G(x) = F(x) + a$. G est donc dérivable sur I par somme de fonctions dérivables, et $G' = F' + 0 = f$. Donc G est une primitive de f sur I.

□

1.2 Opérations sur les primitives

Proposition (Linéarité)**.**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et F et G des primitives de f et g sur cet intervalle I. Alors $\alpha F + G$ est une primitive de $\alpha f + g$ sur I.

Proposition (Produit et quotient)**.**

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et F et G des primitives de f et g sur cet intervalle I.

— Alors $G \times F$ est une primitive de $fG + gF$ sur I.

— Si de plus $\forall x \in I$, $F(x) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{F}$ est une primitive de $-\dfrac{f}{F^2}$ sur I.

Remarque. Pour chaque résultat, il suffit de dériver la primitive annoncée pour vérifier qu'elle convient.

1.3 Primitives usuelles à connaître

$f(x) =$	$F(x) =$
e^x	e^x
k (constante)	kx
x^n, $n \neq -1$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\ln x$	$x\ln(x) - x$

$f(x) =$	$F(x) =$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\dfrac{1}{\cos(x)^2}$	$\tan(x)$
$1 + \tan(x)^2$	$\tan(x)$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
a^x $(a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\})$	$\dfrac{a^x}{\ln(a)}$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, on obtient par composition les formules suivantes, classiques également :

Fonction	Primitive
$u'e^u$	e^u
$u'a^u$, $(a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\})$	$\dfrac{a^u}{\ln(a)}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$

Fonction	Primitive
$u'u^n$ $(n \neq -1)$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$u'\cos u$	$\sin u$
$u'\sin u$	$-\cos u$
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\arctan u$

2 Intégrale d'une fonction

2.1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Définition (Intégrale d'une fonction continue sur un segment)**.**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux réels de I et F une primitive de f sur I. On appelle **intégrale** de f entre a et b le réel $F(b) - F(a)$. On le note :

$$\int_a^b f(t)dt.$$

Remarque. La variable d'intégration est muette :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots$$

Proposition (Validité de la définition).

L'intégrale de f entre a et b est indépendante de la primitive F de f choisie sur l'intervalle I.

Démonstration. Soit F et G deux primitives de f sur I. Alors elles diffèrent d'une constante : $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, $F(x) = G(x) + c$. On a alors $F(b) - F(a) = G(b) + c - (G(a) + c) = G(b) - G(a)$, d'où le résultat. □

Remarque. Quelques conséquences immédiates de la définition :

$$\int_a^a f(t)dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt.$$

Exemple 1. Après avoir justifié leur existence, calculer les réels suivants :

1. pour $x > 0$, $J(x) = \int_1^x (1 - \frac{1}{t})(\ln t - 2)dt$.
   La fonction $t \to (1 - \frac{1}{t})(\ln t - 2)$ est continue entre 1 et x, donc l'intégrale existe, et
   $$J(x) = \int_1^x \left(\ln(t) - \frac{\ln(t)}{t} - 2 + \frac{2}{t}\right) = \left[t\ln(t) - t - \frac{1}{2}(\ln(t))^2 - 2t + 2\ln|t|\right]_1^x,$$
   $$J(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}(\ln(x))^2 - 3x + 2\ln(x) + 3.$$
2. $K = \int_0^1 \sqrt{1-t}\, dt$.
   La fonction $t \to \sqrt{1-t}$ est continue sur $[0, 1]$, donc l'intégrale existe, et
   $$K = \left[-\frac{2}{3}(1-t)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$
3. $L = \int_0^{-\frac{\pi}{2}} (\cos u)^2 du$.
   La fonction $u \to (\cos u)^2$ est continue sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$, donc l'intégrale existe, et
   $$L = \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2u)}{2} du = \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4}\right]_0^{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\sin(-\pi)}{4} - 0 = -\frac{\pi}{4}.$$
4. $M = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}}$.
   La fonction $t \to \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ est continue sur $[\sqrt{3}, 2\sqrt{2}]$, donc l'intégrale existe, et
   $$M = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{2tdt}{2\sqrt{t^2+1}} = \left[\sqrt{t^2+1}\right]_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1.$$

Proposition (Relation de Chasles).

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a, b et c trois réels de I. Alors

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt.$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I. On a :

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(t)dt.$$

□

Remarque. La formule est vraie sans contrainte d'ordre entre a, b et c.

Corollaire (Généralisation de la relation de Chasles).

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a_0, a_1, $\dots a_n$ une suite finie de réels de I. Alors

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt \right) = \int_{a_0}^{a_n} f(t)dt$$

Démonstration. Ce résultat se montre directement par récurrence à partir de la proposition précédente. □

Exemple 2. Après avoir justifié son existence, calculer le réel suivant :

$$N = \int_{-1}^{1} \inf(t,0)dt$$

La fonction $t \to \inf(t,0)$ est continue sur $[-1,1]$, donc l'intégrale existe, et

$$\begin{aligned} N &= \int_{-1}^{0} \inf(t,0)dt + \int_0^1 \inf(t,0)dt \\ &= \int_{-1}^{0} tdt + \int_0^1 0dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0} \\ N &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle

Proposition (Intégrabilité d'une fonction continue par morceaux)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, correspondant à la subdivision $(a = a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b = a_n)$. Alors f est intégrable sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt \right).$$

Proposition (Linéarité)**.**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions continues ou continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a et b deux réels de I. Alors :

$$\alpha \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt = \int_a^b (\alpha f(t) + g(t))\, dt.$$

Démonstration. C'est immédiat dans le cas d'une intégrale de fonction continue par linéarité de la dérivée/primitive. Dans le cas continu par morceaux, il faut en plus utiliser la linéarité de la somme. $\square$

Proposition (Relation de Chasles)**.**

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a, b et c trois réels de I. Alors

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt.$$

Remarque. La formule est vraie sans contrainte d'ordre entre a, b et c.

Démonstration. On suppose pour cette preuve que $a \leqslant b \leqslant c$. Soit $(a = a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, c = a_n)$ une subdivision associée à f. On note $k_0 \in [\![0, n-1]\!]$ l'entier qui vérifie $a_{k_0} \leqslant b \leqslant a_{k_0+1}$. On a alors, grâce à la relation de Chasles pour les fonctions continues :

$$\begin{aligned}
\int_a^c f(t)dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt \right) \\
&= \sum_{k=0}^{k_0-1} \left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt \right) + \int_{a_{k_0}}^b f(t)dt + \int_b^{a_{k_0+1}} f(t)dt + \sum_{k=k_0+1}^{n-1} \left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt \right) \\
&= \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt
\end{aligned}$$

$\square$

Corollaire (Généralisation de la relation de Chasles).

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a_0, a_1, $\ldots a_n$ une suite finie de réels de I. Alors

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt\right) = \int_{a_0}^{a_n} f(t)dt.$$

3 Propriétés des intégrales

3.1 Fonction définie par une intégrale

Proposition (Fonction intégrale de la borne supérieure).

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$, on définit la fonction H par : $\forall x \in I$,

$$H(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Alors :
- H est la primitive de f sur I qui s'annule en a.
- H est de classe C^1 sur l'intervalle I.

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I, qui existe car f est continue sur cet intervalle. On a :

$$\forall x \in I, \quad H(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Donc
- H est dérivable sur I (car F l'est), la dérivée de H est $F' = f$. De plus $H(a) = F(a) - F(a) = 0$. Donc H est une primitive de f sur I qui s'annule en a. Or il n'y a qu'une seule primitive de f qui s'annule en a (puisque deux primitives de f sur le même intervalle diffèrent d'une constante), d'où l'unicité.
- On a vu que H est dérivable sur I, et sa dérivée f est continue sur I. Donc H est de classe C^1 sur I.

$\square$

Remarque. Ce résultat est aussi appelé théorème fondamental de l'analyse.

Proposition (Fonction définie par une intégrale, cas général).

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur I et à valeurs dans J. Soit f une fonction continue sur J. Alors la fonction φ définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad \varphi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$$

est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$, $\varphi'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.

Démonstration. (démonstration à connaître) Soit F une primitive de f sur J (qui existe, car f est continue sur cet intervalle). On a : $\forall x \in I$,

$$\varphi(x) = F(v(x)) - F(u(x)).$$

φ est donc dérivable par composée de fonctions dérivables et on a : $\forall x \in I$,

$$\varphi'(x) = v'(x)F'(v(x)) - u'(x)F'(u(x)) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

□

3.2 Intégrales et relation d'ordre

Proposition (Positivité)**.**

Soit f une fonction continue ou continue par morceaux sur un intervalle I, et a et b deux réels de I vérifiant $a \leqslant b$. Si f est positive sur $[a, b]$ alors

$$0 \leqslant \int_a^b f(t)dt.$$

Démonstration. Dans le cas où f est continue sur I, on note F une primitive sur cet intervalle. La fonction F est dérivable sur $[a, b]$ et $\forall x \in [a, b]$, $F'(x) = f(x) \geqslant 0$. Par inégalité des accroissements finis sur $[a, b]$, on obtient donc :

$$0 = 0(b-a) \leqslant F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt.$$

Pour la preuve dans le cas continu par morceaux, il suffit d'appliquer ce résultat sur chaque intervalle de la subdivision associée. □

Corollaire (Croissance de l'intégration)**.**

Soit f et g deux fonctions continues ou continues par morceaux sur un intervalle I, et a et b deux réels de I vérifiant $a \leqslant b$. Si pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leqslant g(t)$ alors

$$\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt.$$

Démonstration. La fonction $g - f$ est continue ou continue par morceaux sur I et est positive. Puisque $a \leqslant b$, la positivité de l'intégrale donne $0 \leqslant \int_a^b (g-f)(t)dt = \int_a^b (g(t) - f(t))\, dt$. On conclut alors par linéarité de l'intégrale.

□

Exemple 3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx \leqslant \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx$ quand n tend vers l'infini.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f : x \to \frac{x^n}{x+1}$ est continue sur $[0, 1]$, donc l'intégrale existe. Le numérateur dépend de n, on va donc borner le dénominateur qui n'en dépend pas : $\forall x \in [0, 1]$, $0 \leqslant \frac{1}{x+1} \leqslant 1$, donc par produit avec $x^n \geqslant 0$ on obtient $0 \leqslant f(x) \leqslant x^n$. Comme $0 \leqslant 1$, la croissance de l'intégrale donne alors :

$$0 = \int_0^1 0dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx \leqslant \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème d'encadrement donne alors $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx = 0$.

Proposition (Cas de l'intégrale nulle).

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I, et a et b deux réels de I vérifiant $a < b$. Alors

$$\int_a^b f(t)dt = 0 \Longrightarrow \forall t \in [a, b], f(t) = 0.$$

Remarque. Attention, la fonction doit être *continue*, dire qu'elle est continue par morceaux ne suffit pas.

Remarque. On en déduit par contraposée que si f est continue, positive et non nulle sur $[a, b]$ avec $a < b$, alors $\int_a^b f(t)dt > 0$.

Proposition (Inégalité de la moyenne).

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I vérifiant $a \leqslant b$. Alors il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $t \in [a, b]$, $m \leqslant f(t) \leqslant M$ et

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a).$$

Remarque. Cette inégalité est en particulier vraie si m est le minimum de f sur $[a, b]$ et M est le maximum de f sur $[a, b]$.

Démonstration. La fonction f est continue sur $[a, b] \subset I$ donc par le théorème des bornes f est bornée sur ce segment. Il existe donc $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $t \in [a, b]$, $m \leqslant f(t) \leqslant M$. Comme $a \leqslant b$, la croissance de l'intégrale donne alors :

$$\int_a^b m dt \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b M dt,$$

ce qui donne en primitivant :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a).$$

Rmq : on pouvait aussi remplacer la croissance de l'intégrale par l'application de l'inégalité des accroissements finis sur $[a, b]$ à la fonction F (primitive de f). $\square$

Proposition (Inégalité triangulaire pour les intégrales).

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a et b deux réels de I vérifiant $a \leqslant b$. Alors

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt \leqslant (b-a) \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$$

Démonstration. (démonstration à connaître) On sait que pour tout $t \in [a, b]$, $-|f(t)| \leqslant f(t) \leqslant |f(t)|$ On a donc par croissance de l'intégrale (puisque $a \leqslant b$) :

$$-\int_a^b |f(t)|\, dt \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt,$$

ce qui nous donne exactement :

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

La partie majoration de l'inégalité de la moyenne appliquée à la fonction $t \to |f(t)|$ continue sur $[a,b]$ donne ensuite directement :

$$\int_a^b |f(t)|\,dt \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|\,(b-a).$$

Rmq : on pouvait aussi réutiliser la croissance de l'intégrale à la place de l'inégalité de la moyenne. □

Remarque. La continuité par morceaux suffit à montrer la première des deux inégalités.

3.3 Passage à la limite

Il est absolument interdit de passer une limite de l'extérieur à l'intérieur d'une intégrale : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$, il est possible d'avoir

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)dt \neq \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt,$$

et ceci même si on sait déjà que ces limites existent.

Si on souhaite calculer $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)dt$, il faut procéder par calcul direct de l'intégrale ou par encadrement (si le calcul direct est impossible).

Exemple 4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(0)=0$, $f_n(x)=n$ si $x\in]0,\frac{1}{n}]$ et $f_n(x)=0$ si $x>\frac{1}{n}$.

1. Calculer $\int_0^1 f_n(t)dt$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Que peut-on en déduire concernant $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)dt$?

   Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue par morceaux sur $[0,1]$ donc l'intégrale existe. De plus,

   $$\int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^{\frac{1}{n}} ndt + 0 = [nt]_0^{\frac{1}{n}} = 1.$$

   On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)dt$ existe et vaut 1.

2. Soit $t\in[0,1]$. Justifier l'existence de $\lim_{n\to+\infty} f_n(t)$ et calculer cette limite. En déduire la valeur de $\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt$.

   $f_n(0)$ vaut toujours 0. Soit $t\in]0,1]$, $\forall n\geqslant\frac{1}{t}$, $f_n(t)=0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(t)$ existe et vaut 0. On en déduit :

   $$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int_0^1 0dt = 0.$$

3.4 Intégration par parties

Théorème (Intégration par parties)**.**

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et soit u et v deux fonctions de classe C^1 entre a et b. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Démonstration. u et v sont de classe C^1 entre a et b, donc $t \to u'(t)v(t)$ et $t \to u(t)v'(t)$ sont continues sur l'intervalle associé et les deux intégrales existent. On trouve alors par calcul de primitive :

$$\int_a^b \left(u'(t)v(t) + u(t)v'(t)\right) dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b.$$

D'où le résultat par linéarité de l'intégrale. □

Exemple 5. Calculer la valeur de :

$$I = \int_0^1 x^2 \exp(x) dx.$$

Les fonctions $x \to x^2$ et $x \to e^x$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$, on peut donc effectuer une intégration par parties :

$$I = \left[x^2 \exp(x)\right]_0^1 - \int_0^1 2x \exp(x) dx = e - 0 - \int_0^1 2x \exp(x) dx.$$

Les fonctions $x \to 2x$ et $x \to e^x$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$, on peut donc effectuer une nouvelle intégration par parties :

$$I = e - [2x \exp(x)]_0^1 + \int_0^1 2 \exp(x) dx = e - 2e + 0 + [2 \exp(x)]_0^1 = -e + 2e - 2 = e - 2.$$

Exemple 6. Déterminer la primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.
ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc cette primitive existe, et vaut $x \to \int_1^x \ln(t) dt$. Il ne reste plus qu'à calculer cette intégrale. Soit $x > 0$, $t \to \ln(t)$ et $t \to t$ sont de classe C^1 entre 1 et x, une intégration par parties donne donc :

$$\int_1^x \ln(t) dt = [t \ln(t)]_1^x - \int_1^x t \frac{1}{t} dt = x \ln(x) - (x - 1) = x \ln(x) - x + 1.$$

La primitive recherchée est donc $x \to x \ln(x) - x + 1$.

3.5 Changement de variable

Théorème (Changement de variable)**.**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $u : t \longrightarrow u(t)$ une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans I. Alors

$$\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x) dx = \int_\alpha^\beta f\left(u(t)\right) u'(t) dt.$$

Démonstration. (démonstration à connaître) La fonction f est continue sur I, donc admet une primitive F sur cet intervalle. Soit $h = F \circ u$. La fonction h est de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$ (par composée de fonctions de classe C^1), et pour tout $t \in [\alpha, \beta]$,

$$h'(t) = F'(u(t))u'(t) = f(u(t))u'(t).$$

Cette fonction étant continue sur $[\alpha, \beta]$, on peut passer à l'intégrale et on trouve :

$$\int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t) dt = h(\beta) - h(\alpha) = F(u(\beta)) - F(u(\alpha)) = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x) dx.$$

□

Remarque. Si de plus, u est strictement monotone sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$, alors par le théorème de la bijection (u étant continue!) u réalise une bijection de $[\alpha, \beta]$ sur un intervalle $[a, b]$ et

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))\, u'(t)dt.$$

Exemple 7. En utilisant le changement de variable $t = x - 4$, calculer la valeur de :

$$J = \int_0^4 \exp(x-4)dx.$$

$x \to \exp(x-4)$ est continue sur $[0,4]$, donc J existe. $x \to x-4$ est de classe C^1 sur $[0,4]$, on peut donc poser le changement de variables $t = x-4$, avec $dt = dx$:

$$J = \int_{-4}^0 \exp(t)dt = [\exp(t)]_{-4}^0 = 1 - \exp(-4).$$

Exemple 8. En utilisant le changement de variable $t = \cos(x)$, calculer la valeur de :

$$I = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)^2}dx.$$

$x \to \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)^2}$ est continue sur $[0, \pi]$, donc I existe. $x \to \cos(x)$ est de classe C^1 sur $[0, \pi]$, on peut donc poser le changement de variables $t = \cos(x)$ avec $dt = -\sin(x)dx$:

$$I = \int_0^\pi \frac{-1}{1+\cos(x)^2}(-\sin(x))dx = \int_{\cos(0)}^{\cos(\pi)} \frac{-1}{1+t^2}dt = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Exemple 9. En utilisant le changement de variable $x = \cos(t)$, calculer la valeur de :

$$K = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$

$x \to \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[0,1]$, donc K existe. $t \to \cos(t)$ est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ à valeurs dans $[0,1]$, et strictement monotone (décroissante) sur cet intervalle. On peut donc poser le changement de variables "à l'envers" $x = \cos(t)$ avec $dx = -\sin(t)dt$, en utilisant les relations $\cos(0) = 1$ et $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ pour les bornes :

$$K = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1-\cos(t)^2}(-\sin(t))dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(t)|\sin(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^2 dt.$$

Il ne reste plus qu'à linéariser l'expression pour déterminer une primitive :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2t)}{2}dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0 - 0 + 0\right) = \frac{\pi}{4}.$$

4 Sommes de Riemann

Les sommes de Riemann permettent le calcul approché de la valeur d'une intégrale, lorsqu'on ne trouve pas de primitive.

4.1 Définition

Définition (Sommes de Riemann).

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On définit les deux suites $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ comme suit : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \quad \text{et} \quad T_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k),$$

où $a_0 = a$, $a_n = b$ et $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$. Les suites S_n et T_n sont appelées les **sommes de Riemann** associées à la fonction f.

4.2 Cas des fonctions de classe C^1

Théorème (Convergence des sommes de Riemann, cas C^1).

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$. Les sommes de Riemann S_n et T_n convergent vers $I = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$, et l'erreur commise en approchant I par S_n ou T_n est inférieure ou égale à

$$\frac{(b-a)^2}{2n} \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|.$$

Démonstration. On va montrer que la suite $(S_n)_n$ est convergente vers I, on procéderait de même pour $(T_n)_n$. Soit $n \geqslant 1$,

$$|S_n - I| = \left|\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)f(a_k) - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(a_k)-f(t))dt\right|,$$

d'où par inégalité triangulaire, et avec $a_k < a_{k+1}$,

$$|S_n - I| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(a_k)-f(t))dt\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(a_k)-f(t)|\,dt.$$

$|f'|$ est continue sur $[a,b]$ donc (théorème des bornes) bornée sur ce segment et atteint ses bornes : $M = \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|$ existe, et :

$$\forall t \in [a,b], |f'(t)| \leqslant M.$$

La fonction f étant dérivable sur $[a,b]$, l'inégalité des accroissements finis donne alors : $\forall (x,y) \in [a,b]^2$, $|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|$. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\forall t \in [a_k, a_{k+1}]$, on obtient avec $x = a_k$ et $y = t$:

$$|f(a_k) - f(t)| \leqslant M|a_k - t| = M(t-a_k).$$

Alors pour $n \geqslant 1$, on trouve par croissance de l'intégrale ($a_k \leqslant a_{k+1}$) et somme :

$$|S_n - I| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} M(t-a_k)dt\right) = M\sum_{k=0}^{n-1}\left(\left[\frac{(t-a_k)^2}{2}\right]_{a_k}^{a_{k+1}}\right) = M\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(a_{k+1}-ak)^2}{2}.$$

D'où
$$|S_n - I| \leqslant M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\frac{b-a}{n})^2}{2} = M\frac{n(b-a)^2}{2n^2} = M\frac{(b-a)^2}{2n}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} M\frac{(b-a)^2}{2n} = 0$, donc par encadrement $\lim_{n\to+\infty} |S_n - I| = 0$ et la suite $(S_n)_n$ est convergente vers I. On a au passage montré la borne souhaitée pour l'erreur. □

4.3 Cas des fonctions continues

Théorème (Convergence des sommes de Riemann, cas continu)**.**

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors les sommes de Riemann S_n et T_n convergent vers $I = \int_a^b f(t)dt$.

Remarque. Si f est une fonction continue sur $[0, 1]$, alors on a en particulier :
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt.$$

Exemple 10. Étudier la convergence de la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par
$$u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2},$$
donc comme $x \to \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[0, 1]$, par convergence des sommes de Riemann, u converge vers l'intégrale
$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx.$$
Cette intégrale a déjà été calculée dans l'exemple 9. Donc la suite u converge vers $\frac{\pi}{4}$.

4.4 Interprétation géométrique

On peut faire une interprétation de l'intégrale d'une fonction et des sommes de Riemann en termes d'aires : soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a, b]$. On se place dans un repère orthonormal, et on note $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de f. L'intégrale de f entre a et b correspond à l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$:
$$\Delta(f) = \{(x, y), \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$
Pour calculer l'aire de $\Delta(f)$, on l'encadre par deux domaines $\Delta(\varphi_1)$ et $\Delta(\varphi_2)$, associés à des fonctions en escalier φ_1 et φ_2 qui vérifient :
$$\forall x \in [a, b], \varphi_1(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi_2(x).$$
L'aire de $\Delta(f)$ est alors encadrée par les sommes des aires de $\Delta(\varphi_1)$ et $\Delta(\varphi_2)$, qui sont des aires de rectangles et donc facilement calculables. Cette méthode d'approximation de la valeur de l'intégrale est donc appelée méthode des rectangles.