Intégration

Cours de É. Bouchet – PCSI

6 avril 2023

Table des matières

1 Intégrale d'une fonction

1.1 Cas d'une fonction en escalier

Définition 1.1 (Subdivision)

Soit a et b deux réels avec $a < b$. Une **subdivision** de $[a, b]$ est une suite finie $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ telle que :

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b.$$

Définition 1.2 (Pas d'une subdivision)

Soit a et b deux réels avec $a < b$ et $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ une subdivision de $[a, b]$. On dit que σ est une **subdivision à pas constant** lorsqu'il existe $h \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $a_k - a_{k-1} = h$.
La valeur de h est appelée **pas de la subdivision**.

Exemple. $(0, 2, 6)$ est une subdivision de $[0, 6]$ (à pas non constant).
$(0, 2, 4, 6)$ est une subdivision de $[0, 6]$ à pas constant, de pas 2.

Définition 1.3 (Fonction en escalier)

Soit a et b deux réels avec $a < b$ et $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que φ est une **fonction en escalier** sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que φ est constante sur chaque intervalle $]a_{k-1}, a_k[$.

Remarque. Autrement dit, φ est une fonction en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]a_{k-1}, a_k[$, $\varphi(x) = \lambda_k$.

Exemple. La fonction partie entière est une fonction en escalier sur n'importe quel intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

Définition 1.4 (Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment)

Soit a et b deux réels avec $a < b$ et φ une fonction en escalier sur $[a, b]$. En reprenant les notations de la remarque précédente, on définit **l'intégrale sur** $[a, b]$ de φ par : $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(a_k - a_{k-1})$.

Remarque. Dans cette formule, la quantité $\lambda_k(a_k - a_{k-1})$ est l'aire d'un rectangle élémentaire de hauteur λ_k (faire un dessin). Cette aire est comptée positivement si $\lambda_k \geqslant 0$, et négativement sinon. Donc $\int_a^b \varphi(t)dt$ correspond à l'aire algébrique de la région délimitée par le graphe de φ et l'axe des abscisses.

1.2 Cas d'une fonction continue sur un segment

Définition 1.5 (Approximation d'une fonction continue par des fonctions en escalier)

Soit a et b deux réels avec $a < b$, f une fonction réelle continue sur $[a, b]$ et $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision de $[a, b]$. On note f_σ^+ et f_σ^- les deux fonctions en escalier définies par : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\forall x \in [a_{k-1}, a_k[$,

$$f_\sigma^+(x) = \max_{t \in [a_{k-1}, a_k]} f(t) \quad \text{et} \quad f_\sigma^-(x) = \min_{t \in [a_{k-1}, a_k]} f(t).$$

Faire un dessin illustratif.

Remarque. D'après le théorème des bornes atteintes, une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Donc $\forall k \in [\![1, n]\!]$, les nombres $\displaystyle\max_{t \in [a_{k-1}, a_k]} f(t)$ et $\displaystyle\min_{t \in [a_{k-1}, a_k]} f(t)$ sont bien définis.

Définition 1.6 (Intégrale d'une fonction continue sur un segment)

Soit a et b deux réels avec $a < b$ et f une fonction réelle continue sur $[a, b]$. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les subdivisions de $[a, b]$. En réutilisant les notations de la définition précédente, on a :

$$\inf_{\sigma \in \mathcal{S}} \left(\int_a^b f_\sigma^+(t)dt \right) = \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} \left(\int_a^b f_\sigma^-(t)dt \right).$$

Cette valeur commune est appelée **intégrale de a à b de f**, et est notée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$, $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

Démonstration. L'existence et l'égalité des bornes inférieure et supérieure sont admises. □

Remarque. Dans le cas d'une fonction en escalier, cette définition coïncide avec celle donnée précédemment. Cela donne par exemple que si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\int_a^b \lambda dt = (b - a)\lambda$.

Remarque. Cette définition permet de conserver la notion d'intégrale définie comme aire sous la courbe.

Définition 1.7 (Intégrale aux bornes interverties)

Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $(a, b) \in I^2$ tels que $a < b$. On définit :

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt.$$

Remarque. Dans ce cas, l'aire est alors comptée négativement.

Définition 1.8 (Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment)

Soit a et b deux réels avec $a < b$ et f une fonction réelle continue sur $[a, b]$. On définit la **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$ par la valeur $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$.

Remarque. Cette notion généralise celle de moyenne sur un nombre fini de réels.

2 Propriétés des intégrales de fonctions continues

2.1 Premières propriétés

Proposition 2.1 (Linéarité)

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, $(a, b) \in I^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Démonstration. Par construction, $\int_a^b f$ est la limite d'intégrales de fonctions en escalier. On commence par supposer que $a \leqslant b$.

— Montrons que la propriété est vraie pour des fonctions en escalier φ et ψ. Soit $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision adaptée aux deux fonctions (qui s'obtient par exemple en mettant en commun les points d'une subdivision adaptée à φ et d'une subdivision adaptée à ψ). Alors :

$$\int_a^b (\lambda\varphi + \mu\psi) = \sum_{k=1}^n (\lambda\varphi + \mu\psi) \left(\frac{a_{k-1} + a_k}{2} \right) (a_k - a_{k-1})$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{a_{k-1}+a_k}{2}\right)(a_k - a_{k-1}) + \mu \sum_{k=1}^{n} \psi\left(\frac{a_{k-1}+a_k}{2}\right)(a_k - a_{k-1})$$

$$\int_a^b (\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda \int_a^b \varphi + \mu \int_a^b \psi.$$

— Par construction de $\int_a^b (\lambda f + \mu g)$, il une suite de subdivisions $(\sigma_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $[a,b]$ et des fonctions en escalier f_{σ_p}, g_{σ_p} et $(\lambda f + \mu g)_{\sigma_p}$ telles que :

$$\begin{aligned}
\lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g &= \lim_{p\to+\infty} \left(\lambda \int_a^b f_{\sigma_p} + \mu \int_a^b g_{\sigma_p}\right) \\
&= \lim_{p\to+\infty} \int_a^b (\lambda f_{\sigma_p} + \mu g_{\sigma_p}) \\
&= \lim_{p\to+\infty} \int_a^b (\lambda f + \mu g)_{\sigma_p} \\
\lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g &= \int_a^b (\lambda f + \mu g)
\end{aligned}$$

— Si $b < a$, on montre que $\int_b^a (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_b^a f + \mu \int_b^a g$ puis on multiplie par -1 : $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
On a donc bien montré le résultat annoncé. □

Proposition 2.2 (Relation de Chasles)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $(a,b,c) \in I^3$. Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$.

Démonstration. La stratégie est la même que pour la linéarité : on montre le résultat pour les fonctions en escalier, puis on passe à la limite et on étudie le cas où les bornes de l'intégrale sont retournées. □

Remarque. La formule est vraie sans contrainte d'ordre entre a, b et c.

Proposition 2.3 (Généralisation de la relation de Chasles)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a_0, a_1, … a_n une suite finie de réels de I. Alors

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt\right) = \int_{a_0}^{a_n} f(t)dt$$

Démonstration. Ce résultat se montre directement par récurrence à partir de la proposition précédente. □

2.2 Intégrales et relation d'ordre

Proposition 2.4 (Positivité)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $(a,b) \in I^2$ tels que $a \leqslant b$. Si f est positive sur $[a,b]$ alors $0 \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Démonstration. On le montre pour les fonctions en escalier avant de passer à la limite.

— Soit φ une fonction en escalier positive, la définition $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(a_k - a_{k-1})$ fait intervenir une somme où tous les termes sont positifs, donc l'intégrale est positive.

— Par construction, il existe une suite de subdivisions $(\sigma_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $[a,b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{p\to+\infty}\int_a^b \varphi_{\sigma_p}^+$.
Or $\varphi_{\sigma_p}^+$ est positive, car $\varphi_{\sigma_p}^+ \geqslant f \geqslant 0$, donc d'après le point précédent, son intégrale est aussi positive. Par passage à la limite dans les inégalités larges, on a $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$.

□

Proposition 2.5 (Croissance de l'intégration)

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $(a,b)\in I^2$ tels que $a\leqslant b$. Si pour tout $t\in[a,b]$, $f(t)\leqslant g(t)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$.

Démonstration. La fonction $g-f$ est continue sur I et est positive. Puisque $a\leqslant b$, la positivité de l'intégrale donne $0\leqslant \int_a^b (g-f)(t)dt = \int_a^b (g(t)-f(t))\,dt$. On conclut alors par linéarité de l'intégrale. □

Exercice 1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx \leqslant \frac{1}{n+1}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx$.
Solution : Soit $n\in\mathbb{N}$. La fonction $f : x\to \frac{x^n}{x+1}$ est continue sur $[0,1]$, donc l'intégrale existe. Le numérateur dépend de n, on va donc borner le dénominateur qui n'en dépend pas : $\forall x\in[0,1]$, $0\leqslant \frac{1}{x+1}\leqslant 1$, donc par produit avec $x^n\geqslant 0$ on obtient $0\leqslant f(x)\leqslant x^n$. Comme $0\leqslant 1$, la croissance de l'intégrale donne alors :

$$0=\int_0^1 0dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx \leqslant \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$, le théorème d'encadrement donne alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx = 0$.

Proposition 2.6 (Stricte positivité)

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I et $(a,b)\in I^2$ tels que $a<b$. Si f est non nulle, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt > 0$.

Démonstration. Par hypothèse, il existe $x_0\in[a,b]$ tel que $f(x_0)>0$. Puisque $\frac{f(x_0)}{2}<f(x_0)$, la continuité de f donne l'existence d'un réel $\eta>0$ tel que $\forall x\in]x_0-\eta,x_0+\eta[$, $f(x)\geqslant\frac{f(x_0)}{2}$.
Soit φ la fonction définie sur $[a,b]$ par : $\forall x\in]x_0-\eta,x_0+\eta[$, $\varphi(x)=\frac{f(x_0)}{2}$ et $\forall x\notin]x_0-\eta,x_0+\eta[$, $\varphi(x)=0$. Par construction, φ est une fonction en escalier et $\forall x\in[a,b]$, $f(x)\geqslant\varphi(x)$. Comme $a\leqslant b$, la croissance de l'intégrale donne :

$$\int_a^b f(t)dt \geqslant \int_a^b \varphi(t)dt = 2\eta\frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

□

Remarque. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a<b$ et $(f,g)\in(C^0([a,b]))^2$. On suppose que $f\leqslant g$ sur $[a,b]$ et que $\exists x\in[a,b]$ tel que $f(x)<g(x)$. Le résultat précédent appliqué à $g-f$ donne alors un résultat de croissance stricte : $\int_a^b f < \int_a^b g$.

Proposition 2.7 (Cas de l'intégrale nulle)

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I et $(a,b)\in I^2$ tels que $a<b$. Alors

$$\int_a^b f(t)dt = 0 \Longrightarrow \forall t\in[a,b], f(t)=0.$$

Démonstration. Se déduit du résultat précédent par contraposée. □

Proposition 2.8 (Inégalité triangulaire pour les intégrales)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et $(a,b) \in I^2$ tels que $a \leqslant b$. Alors $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt$.

Démonstration. On sait que pour tout $t \in [a,b]$, $-|f(t)| \leqslant f(t) \leqslant |f(t)|$ On a donc par croissance de l'intégrale (puisque $a \leqslant b$) :

$$-\int_a^b |f(t)|\, dt \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt,$$

ce qui donne exactement $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt$. □

2.3 Passage à la limite et développement asymptotique

Il est interdit de passer une limite de l'extérieur à l'intérieur d'une intégrale : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$, on peut avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt \neq \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)dt$, même si on sait déjà que ces limites existent.
Pour calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt$, il faut procéder par calcul direct de l'intégrale ou par encadrement (si le calcul direct est impossible).

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(0) = 0$, $f_n(t) = n$ si $t \in]0, \frac{1}{n}]$ et $f_n(t) = 0$ si $t > \frac{1}{n}$.

1. Calculer $\int_0^1 f_n(t)dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Que peut-on en déduire concernant $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt$?
   Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est en escalier sur $[0,1]$ donc l'intégrale existe. De plus,
   $$\int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^{\frac{1}{n}} ndt + 0 = [nt]_0^{\frac{1}{n}} = 1.$$
   On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt$ existe et vaut 1.
2. Soit $t \in [0,1]$. Justifier l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)$ avant de la calculer. En déduire la valeur de $\int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)dt$.
   Solution : $f_n(0)$ vaut toujours 0. Soit $t \in]0,1]$, $\forall n \geqslant \frac{1}{t}$, $f_n(t) = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)$ existe et vaut 0. On en déduit :
   $$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int_0^1 0dt = 0.$$

De même, on ne peut pas prendre directement l'équivalent d'une intégrale. Pour obtenir un développement asymptotique d'une expression impliquant une intégrale, on passe le plus souvent par des encadrements.

Exercice 3. Montrer que $\int_x^{x+1} e^t \ln(t)dt \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x(e-1)\ln(x)$.
Solution : Soit $x > 0$ et $t \in [x, x+1]$. On a $\ln(x) \leqslant \ln(t) \leqslant \ln(x+1)$. Comme $x \leqslant x+1$, la croissance de l'intégrale donne alors :

$$\ln(x)\int_x^{x+1} e^t dt = \int_x^{x+1} e^t \ln(x)dt \leqslant \int_x^{x+1} e^t \ln(t)dt \leqslant \int_x^{x+1} e^t \ln(x+1)dt = \ln(x+1)\int_x^{x+1} e^t dt.$$

Un calcul permet donc d'obtenir :

$$\ln(x)e^x(e-1) = \ln(x)(e^{x+1} - e^x) \leqslant \int_x^{x+1} e^t \ln(t)dt \leqslant \ln(x+1)(e^{x+1} - e^x) = \ln(x+1)e^x(e-1).$$

Si $x > 1$, $\ln(x)e^x(e-1) > 0$, ce qui donne par quotient :

$$1 \leqslant \frac{\int_x^{x+1} e^t \ln(t)dt}{\ln(x)e^x(e-1)} \leqslant \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}.$$

On en déduit par théorème d'encadrement que $\frac{\int_x^{x+1} e^t \ln(t)dt}{\ln(x)e^x(e-1)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et donc $\int_x^{x+1} e^t \ln(t)dt \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x(e-1)\ln(x)$.

3 Sommes de Riemann

Définition 3.1 (Sommes de Riemann)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leqslant b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$. On définit les suites $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \quad \text{et} \quad T_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k),$$

où $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$. Ces suites sont appelées **sommes de Riemann** associées à la fonction f.

Remarque. En particulier, on trouve $a_0 = a$ et $a_n = b$.

Remarque. C'est une méthode d'approximation de la valeur de l'intégrale, appelée méthode des rectangles. Faire le dessin illustratif.

Proposition 3.2 (Convergence des sommes de Riemann)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leqslant b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$. Les sommes de Riemann (S_n) et (T_n) convergent vers $I = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Démonstration. On effectue la preuve dans le cas particulier où f est lipschitzienne de rapport $M > 0$ (cela couvre notamment le cas C^1 grâce à l'inégalité des accroissements finis). On étudie le cas de la suite (S_n), le raisonnement s'adapterait ensuite facilement pour (T_n).
Soit $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
|S_n - I| &= \left|\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt\right| && \text{par relation de Chasles}\\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)f(a_k) - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt\right| && \text{car } a_{k+1}-a_k = \frac{b-a}{n}\\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(a_k)-f(t))dt\right| && \text{par linéarité de la somme et de l'intégrale}\\
|S_n - I| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(a_k)-f(t)|\, dt && \text{par inégalités triangulaires, avec } a_k < a_{k+1}
\end{aligned}$$

Or f est M-lipschitzienne, donc $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\forall t \in [a_k, a_{k+1}]$, $|f(a_k) - f(t)| \leqslant M\,|a_k - t| = M(t-a_k)$.
Pour $n \geqslant 1$, on trouve alors par croissance de l'intégrale (car $a_k \leqslant a_{k+1}$) et somme :

$$|S_n - I| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} M(t-a_k)dt\right) = M\sum_{k=0}^{n-1}\left(\left[\frac{(t-a_k)^2}{2}\right]_{a_k}^{a_{k+1}}\right) = M\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(a_{k+1}-ak)^2}{2}.$$

D'où
$$|S_n - I| \leqslant M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\frac{b-a}{n})^2}{2} = M\frac{n(b-a)^2}{2n^2} = M\frac{(b-a)^2}{2n}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} M\dfrac{(b-a)^2}{2n} = 0$, donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} |S_n - I| = 0$ et la suite $(S_n)_n$ est convergente vers I. $\square$

Remarque. Dans le cas où f est M-lipschitzienne sur $[a,b]$, on a montré au passage une majoration de l'erreur commise par $\frac{M(b-a)^2}{2n}$.
Cette majoration n'est pas très bonne, puisque $\frac{1}{n}$ converge lentement par 0. La méthode des trapèzes, qui consiste à adapter la méthode des rectangles en utilisant des trapèzes à la place des rectangles (l'approximation locale est affine au lieu de constante, faire un dessin pour illustrer) permettrait une erreur en $O(\frac{1}{n^2})$, ce qui est bien mieux.

Remarque. Si f est une fonction continue sur $[0,1]$, alors on a en particulier :
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt.$$

Exercice 4. Étudier la convergence de la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2 - k^2}$.

<u>Solution :</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}$. Or $x \to \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[0,1]$, donc par convergence des sommes de Riemann, u converge vers l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$. Cette intégrale a déjà été calculée dans le chapitre de calcul de primitives. Donc la suite u converge vers $\dfrac{\pi}{4}$.

4 Lien entre intégrale et primitive

Proposition 4.1 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$, on définit la fonction F par : $\forall x \in I$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. Alors F est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

Démonstration. Il est immédiat que $F(a) = 0$. Soit $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}^*$. On pose $u(h) = \left|\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right|$.
Un retour à la définition de F, la relation de Chasles et la linéarité de l'intégrale donnent :
$$u(h) = \left|\frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt - hf(x)\right)\right| = \left|\frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t)dt - \int_x^{x+h} f(x)dt\right)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t) - f(x)dt\right|.$$

Si $h > 0$ (le raisonnement s'adapte au cas $h < 0$ à l'aide de changements de signes), l'inégalité triangulaire donne :
$$u(h) \leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt.$$

Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue en x, donc il existe $\eta > 0$ tel que $\forall t \in [x-\eta, x+\eta]$, $|f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Donc si $h \in [0,\eta]$, on obtient par croissance de l'intégrale (puisque $x \leqslant x+h$) :
$$u(h) \leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varepsilon dt = \frac{1}{h} \times h \times \varepsilon = \varepsilon.$$

Cela prouve que $u(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ et donc que $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(x)$. Donc F est dérivable en x et $F'(x) = f(x)$. Ce raisonnement étant valable pour tout $x \in I$, on a donc bien que F est dérivable et que $F' = f$. $\square$

Remarque. Comme f est continue, on obtient de plus que F est de classe C^1 sur I.

Remarque. On en déduit comme au premier semestre que toute fonction continue sur I admet des primitives, que si F est une primitive de f, $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ et les formules d'intégration par parties et de changement de variables.

Exercice 5. Étudier la dérivabilité de la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \displaystyle\int_0^{x^2} e^{t^2} dt$.

<u>Solution :</u> Soit F une primitive de $t \mapsto e^{t^2}$ sur $\mathbb{R}$ (qui existe, puisque la fonction est continue sur cet intervalle). Alors $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2} dt = F(x^2) - F(0).$$

φ est donc dérivable par composée de fonctions dérivables et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 2xF'(x^2) = 2xe^{x^4}$.

Proposition 4.2 (Cas des fonctions paires, impaires ou périodiques)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

— Si f est impaire, alors $\forall x \in I$, $\int_{-x}^x f = 0$.
— Si f est paire, alors $\forall x \in I$, $\int_{-x}^x f = 2\int_0^x f$.
— Si f est périodique de période $T > 0$, alors $\forall x \in I$, $\int_x^{x+T} f = \int_0^T f$.

Remarque. Faire des dessins pour illustrer.

Démonstration. Comme f est continue sur I, il existe une primitive F de f sur I.

— Si f est impaire, on pose g la fonction définie sur I par $x \to \int_{-x}^x f$. Alors $\forall x \in I$, $g(x) = F(x) - F(-x)$. La fonction g est donc dérivable sur I, et comme f est impaire,

$$\forall x \in I, \quad g'(x) = F'(x) + F'(-x) = f(x) + f(-x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Donc g est constante sur I. Or $g(0) = \int_0^0 f = 0$. Donc g est la fonction nulle, d'où le résultat annoncé.
— Si f est paire, on procède de même en posant $g : x \to \int_{-x}^x f - 2\int_0^x f$.
— Si f est périodique de période T, on procède de même en posant $g : x \to \int_x^{x+T} f - \int_0^T f$.

□

5 Inégalité de Taylor-Lagrange

5.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Proposition 5.1 (Formule de Taylor avec reste intégral (à l'ordre n))

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe C^{n+1} sur l'intervalle I. Pour tout $(a,b) \in I^2$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Remarque. Cette formule n'est pas exigible en première année, mais on en a besoin pour démontrer la suivante, qui elle le sera.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, et $(a,b) \in I^2$. On pose :
$P(n) =$ « si $f \in C^{n+1}(I)$, alors $f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$ ».

— Pour $n = 0$, soit f une fonction de classe C^1 sur I, alors f' est continue, de primitive f, et on a :

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a),$$

d'où : $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)dt$. Donc $P(0)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vrai. Soit f une fonction de classe C^{n+2} sur I. Elle est donc aussi en particulier de classe C^{n+1} et on trouve en appliquant $P(n)$:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Comme f est de classe C^{n+2} sur I, $f^{(n+1)}$ est de classe C^1 sur I. Or $t \to \frac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ est également de classe C^1 sur I, on peut donc transformer l'intégrale par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt &= \left[\frac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^b - \int_a^b \frac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt.\end{aligned}$$

En remplaçant dans la relation précédente, on obtient

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt,$$

donc $P(n+1)$ est vraie. Ce qui termine la preuve.

□

Remarque. Si P est une fonction polynôme de degré n définie sur $\mathbb{R}$ alors P est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $P^{(n+1)} = 0$. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

et on retrouve la formule de Taylor pour les polynômes.

Remarque. La formule de Taylor avec reste intégral présente de fortes similitudes de forme avec la formule de Taylor-Young, vue dans le chapitre sur les développements limités. Ces deux formules ont cependant des natures très différentes :

— La formule de Taylor-Young donne une approximation locale, au voisinage d'un point.

— La formule de Taylor avec reste intégral est une relation globale, qu'on peut appliquer entre deux points a et b potentiellement éloignés.

5.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Proposition 5.2 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe m et M deux réels tels que $\forall t \in I$, $m \leqslant f^{(n+1)}(t) \leqslant M$. Alors $\forall (a,b) \in I^2$ tels que $a \leqslant b$,

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} m \leqslant f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} M.$$

Remarque. Attention : contrairement à la formule de Taylor avec reste intégral, cette inégalité de Taylor-Lagrange nécessite $a \leqslant b$.

Démonstration. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n, dont les hypothèses sont vérifiées :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Comme pour tout $t \in [a,b]$, $m \leqslant f^{(n+1)}(t) \leqslant M$, on obtient par produit avec $\frac{(b-t)^n}{n!} \geqslant 0$:

$$\frac{(b-t)^n}{n!}m \leqslant \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) \leqslant \frac{(b-t)^n}{n!}M,$$

puis par croissance de l'intégrale (comme $a \leqslant b$),

$$m\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}dt \leqslant \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt \leqslant M\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}dt.$$

En intégrant, et en remplaçant dans la formule avec le reste intégral, on trouve directement :

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}m \leqslant f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}M.$$

□

Proposition 5.3 (Inégalité de Taylor-Lagrange, deuxième version)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in I$, $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant K$. Alors $\forall (a,b) \in I^2$,

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}K.$$

Démonstration. Si $a \leqslant b$, il suffit d'appliquer la première version de l'inégalité à $m = -K$ et $M = K$. Si $b \leqslant a$, on reprend la preuve en l'adaptant : par la formule de Taylor avec reste intégral,

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right| = \left|\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt\right| = \left|\int_b^a \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt\right|.$$

Puisque $b \leqslant a$, l'inégalité triangulaire pour les intégrales donne :

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right| \leqslant \int_b^a \left|\frac{(b-t)^n}{n!}\right| \left|f^{(n+1)}(t)\right| dt \leqslant K\int_b^a \frac{(t-b)^n}{n!}dt = K\frac{(a-b)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

D'où le résultat annoncé. □

Exercice 6. Montrer que pour tout $x > 0$, $\ln(1+x) \geqslant x - \dfrac{x^2}{2}$.

<u>Solution :</u> La fonction $f : t \longrightarrow \ln(1+t)$ est de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$, donc en particulier de classe C^2, et on a :

$$\forall t > 0, \quad f'(t) = \frac{1}{t+1}, \quad f''(t) = -\frac{1}{(t+1)^2} \geqslant -1.$$

On applique la partie minoration de l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre 0 et $x > 0$:

$$-\frac{x^2}{2} \leqslant f(x) - f(0) - f'(0)x = \ln(1+x) - \ln(1) - 1x.$$

Donc : $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x)$.

Exercice 7. En utilisant la fonction $f : x \longrightarrow \ln(1+x)$ définie sur $[0,+\infty[$, à laquelle on appliquera l'inégalité de Taylor-Lagrange, étudier la convergence de la suite (S_n) définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

<u>Solution :</u> La fonction $f : x \longrightarrow \ln(1+x)$ est de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$ et on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 0$,

$$f^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!(-1)^{k-1}}{(x+1)^k}, \text{ donc } \left|f^{(k)}(x)\right| = \frac{(k-1)!}{(x+1)^k} \leqslant (k-1)!.$$

On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n entre 0 et $y > 0$, en majorant $\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ par $n!$:

$$\left|\ln(1+y) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}y^k}{k}\right| \leqslant n! \frac{y^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{y^{n+1}}{(n+1)}.$$

On trouve en particulier que pour $y = 1$: $|\ln(2) - S_n| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)}$. Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0$. Donc par encadrement (S_n) converge vers $\ln(2)$.

6 Extension au cas des fonctions complexes

Définition 6.1 (Intégrale d'une fonction à valeurs complexes, rappel)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in I^2$ et $f \in C^0(I,\mathbb{C})$. On définit $\int_a^b f \in \mathbb{C}$ par $\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}(f) + i \int_a^b \mathrm{Im}(f)$.

Cette définition permet de généraliser plusieurs résultats obtenus dans le cas de fonctions à valeurs réelles :
- La formule d'intégration d'une constante et plus généralement les relations intégrale-primitive.
- La linéarité et la relation de Chasles.
- L'inégalité triangulaire : si $a \leqslant b$, $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.
- La formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange (mais seulement la version avec les modules).

La positivité et la croissance ne sont pas généralisables (puisqu'il n'y a pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$).