Limites d'une fonction en un point

Cours de É. Bouchet – ECS1

12 novembre 2019

Table des matières

1 Définition

Dans tout le chapitre, les fonctions f considérées sont définies sur un ensemble $D_f \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1.1 Voisinage

Définition (Voisinage d'un point)**.**

Soit x_0 un réel. Un **voisinage** de x_0 est un intervalle ouvert contenant x_0.
On dit qu'une fonction f est **définie au voisinage de** x_0 lorsqu'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que $I \setminus \{x_0\} \subset D_f$.

Remarque. f n'a pas besoin d'être définie au point x_0 pour être définie au voisinage de x_0.

Exemple 1. La fonction f telle que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{1}{x}$ est définie au voisinage de tout point de $\mathbb{R}$.

Définition (Voisinage de l'infini)**.**

Un **voisinage** de $+\infty$ (resp. $-\infty$) est un intervalle du type $]B, +\infty[$ (resp. $]-\infty, B[$), où $B \in \mathbb{R}$.

1.2 Limite et continuité de la fonction f en x_0

Définition (Limite de f en x_0)**.**

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet pour **limite** ℓ en x_0 lorsque pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout élément $x \in D_f \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$,

$$|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x_0} f = \ell$.

Remarque. Cela s'écrit également : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in Df$, $|x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Proposition (Unicité de la limite)**.**

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f admet une limite réelle en x_0, alors cette limite est unique.

Démonstration. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que f admet deux limites réelles distinctes ℓ et ℓ' en x_0. Soit $\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{3} > 0$, il existe donc $\eta > 0$ et $\eta' > 0$ tels que pour tout $x \in D_f$,

$$|x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \text{ et } |x - x_0| \leqslant \eta' \Longrightarrow \left|f(x) - \ell'\right| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $x \in D_f$ tel que $|x - x_0| \leqslant \min(\eta, \eta')$. On trouve par inégalité triangulaire :

$$\left|\ell - \ell'\right| = \left|\ell - f(x) + f(x) - \ell'\right| \leqslant |\ell - f(x)| + \left|f(x) - \ell'\right| \leqslant 2\varepsilon = \frac{2}{3}\left|\ell - \ell'\right|,$$

ce qui est absurde. D'où l'unicité. □

Définition (Continuité)**.**

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est **continue** en x_0 lorsque f est définie en x_0 et que f admet pour limite $f(x_0)$ en x_0.

1.3 Limite à droite et à gauche au voisinage de x_0

Définition (Limite à gauche)**.**

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, ou telle que x_0 est une borne de D_f. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. La fonction f admet pour **limite à gauche** ℓ en x_0 lorsque pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $\forall x \in D_f \cap [x_0 - \eta, x_0]$,

$$|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$.

Définition (Limite à droite)**.**

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, ou telle que x_0 est une borne de D_f. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. La fonction f admet pour **limite à droite** ℓ en x_0 lorsque pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $\forall x \in D_f \cap [x_0, x_0 + \eta]$,

$$|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.

Proposition.

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. La fonction f admet pour limite ℓ en x_0 si et seulement si

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell.$$

Si $x_0 \in Df$, il faut de plus ajouter la condition $\ell = f(x_0)$.

Exemple 2. Soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = 1$ si $x > 0$. La fonction admet une limite à droite en 0, qui vaut 1, et une limite à gauche en 0, qui vaut 0. Elle n'admet par contre pas de limite en 0.

1.4 Extension de la notion de limite

Définition (Limite infinie au voisinage de x_0)**.**

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, ou telle que x_0 est une borne de D_f. La fonction f admet pour limite $+\infty$ en x_0 lorsque pour tout $A > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$,

$$f(x) \geqslant A.$$

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

Remarque. De même, la fonction f admet pour limite $-\infty$ en x_0 lorsque pour tout $A > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$,

$$f(x) \leqslant -A.$$

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Définition (Limite finie au voisinage de l'infini)**.**

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. Soit ℓ un réel. La fonction f admet ℓ pour limite en $+\infty$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \in D_f \cap [B, +\infty[$,

$$|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{+\infty} f = \ell$.

Définition (Limite infinie au voisinage de l'infini)**.**

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. La fonction f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ lorsque pour tout $A > 0$, il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \in D_f \cap [B, +\infty[$,

$$f(x) \geqslant A.$$

On note alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

Remarque. On peut également rencontrer les cas suivants :

— La fonction f admet ℓ pour limite en $-\infty$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \in D_f \cap]-\infty, -B]$,

$$|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

— La fonction f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$ lorsque pour tout $A > 0$, il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \in D_f \cap]-\infty, -B]$,

$$f(x) \geqslant A.$$

Proposition (Unicité de la limite)**.**

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (resp. de $-\infty$). Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$) existe, alors cette limite est unique.

2 Propriétés

2.1 Opérations sur les limites

Soit f et g deux fonctions. Soit α un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$. Soit ℓ_1 et ℓ_2 deux réels. On suppose dans cette section que $\lim_{x\to\alpha} f(x)$ existe et que $\lim_{x\to\alpha} g(x)$ existe.

Remarque. Attention : avant toute opération, il est indispensable d'établir *l'existence* de chacune des limites intervenant dans le calcul.

$\lim(f+g)$:

$\lim g$ \ $\lim f$	ℓ_1	$+\infty$	$-\infty$
ℓ_2	$\ell_1+\ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

$\lim(|f.g|)$

$\lim g$ \ $\lim f$	$\ell_1 > 0$	0	$+\infty$
$\ell_2 > 0$	$\ell_1\ell_2$	0	$+\infty$
0	0	0	F.I.
$+\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$

On applique ensuite les règles de signes pour trouver des limites avec $\ell_i < 0$ ou $-\infty$.

Proposition (Limite de l'inverse)**.**

- Si $\lim_\alpha f = \ell \neq 0$, alors $\lim_\alpha \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$.
- Si $\lim_\alpha f = \pm\infty$, alors $\lim_\alpha \frac{1}{f} = 0$.
- Si $\lim_\alpha f = 0$ et $f > 0$ au voisinage de α, alors $\lim_\alpha \frac{1}{f} = +\infty$.
- Si $\lim_\alpha f = 0$ et $f < 0$ au voisinage de α, alors $\lim_\alpha \frac{1}{f} = -\infty$.

Les limites pour le quotient s'obtiennent ensuite à partir de celles du produit et de l'inverse.

2.2 Limites et relation d'ordre

Proposition.

Soit α un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$, et f une fonction définie au voisinage de α. Si la fonction f admet une limite finie en α, alors f est bornée au voisinage de α.

Démonstration. On effectue la preuve dans le cas $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ la limite finie de f en α.
Soit $\varepsilon = 1 > 0$. Alors $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in D_f \cap [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$, $|f(x) - \ell| \leqslant 1$, c'est-à-dire $\ell - 1 \leqslant f(x) \leqslant \ell + 1$.
Donc f est bornée au voisinage de α (par $\ell - 1$ et $\ell + 1$). □

Proposition (Passage à la limite dans une inégalité)**.**

Soit α un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$. Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de α, et soit ℓ_1 et ℓ_2 deux réels. On suppose que pour x au voisinage de α,

$$f(x) \leqslant g(x).$$

Si f admet pour limite ℓ_1 en α et g admet pour limite ℓ_2 en α alors $\ell_1 \leqslant \ell_2$.

Démonstration. On effectue la preuve dans le cas $\alpha \in \mathbb{R}$.
Soit $D = D_f \cap D_g$. On raisonne par l'absurde en supposant $\ell_1 > \ell_2$.
La fonction $f - g$ a pour limite $\ell_1 - \ell_2$ en α. On pose $\varepsilon = \frac{\ell_1 - \ell_2}{2}$.
Notre supposition donne $\varepsilon > 0$, il existe donc $\eta_1 > 0$ tel que $\forall x \in D \cap [\alpha - \eta_1, \alpha + \eta_1]$,

$$|(f - g)(x) - (\ell_1 - \ell_2)| \leqslant \varepsilon,$$

c'est-à-dire en particulier $0 < \varepsilon \leqslant f(x) - g(x)$. Donc

$$\forall x \in D \cap [\alpha - \eta_1, \alpha + \eta_1], \quad f(x) > g(x).$$

Par ailleurs, on a supposé $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de α. Il existe donc $\eta_2 > 0$ tel que :

$$\forall x \in D \cap [\alpha - \eta_2, \alpha + \eta_2], \quad f(x) \leqslant g(x).$$

Soit $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. Alors $\forall x \in D \cap [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$, on a à la fois $f(x) > g(x)$ et $f(x) \leqslant g(x)$, ce qui est impossible.
D'où le résultat. □

Remarque. En particulier, si $f(x) \geqslant 0$ au voisinage de α et si f admet une limite ℓ en α alors $\ell \geqslant 0$.
Mais attention, ce résultat devient faux si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes.

Remarque. Ce résultat s'étend aussi au cas des limites infinies :

— Si pour tout x voisin de α, $f(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = +\infty$.

— Si pour tout x voisin de α, $f(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$.

2.3 Théorème d'encadrement

Théorème (Théorème d'encadrement)**.**

Soit α un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$. Soit f, g, h trois fonctions définies au voisinage de α, et soit ℓ un réel. On suppose que pour tout x voisin de α,
$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x),$$
et que f et h admettent la même limite ℓ en α. Alors g admet également pour limite ℓ en α.

Démonstration. On fait la démonstration pour le cas $\alpha = +\infty$. Soit $D = D_f \cap D_g \cap D_h$.
Par hypothèse, il existe un réel $A > 0$ tel que, pour tout $x \in D$,
$$x \geqslant A \Longrightarrow f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x).$$
Les fonctions f et h ont pour limite ℓ en α. Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc des réels B et $B' > 0$ tels que, pour tout $x \in D$,
$$x \geqslant B \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \text{ et } x \geqslant B' \Longrightarrow |h(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$
Pour $x \geqslant \max(A, B, B')$, on a donc $\ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \leqslant \ell + \varepsilon$. Ce qui s'écrit également : pour tout $x \in D$,
$$x \geqslant \max(A, B, B') \Longrightarrow |g(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$
Donc g admet pour limite ℓ en α. □

Remarque. Ce théorème fournit **l'existence et la valeur** de la limite.

Exemple 3. En particulier, $\lim\limits_{x \to \alpha} |f| = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to \alpha} f = 0$.

Corollaire.

Soit α un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$. Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de α. Si f est une fonction bornée au voisinage de α et si $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} (fg)(x) = 0$.

Démonstration. La fonction f est bornée au voisinage de α, il existe donc des réels m et M tels que pour x au voisinage de α,
$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$
Par produit avec $g(x)$ (dont on ne connaît pas le signe), $(fg)(x)$ est compris entre $mg(x)$ et $Mg(x)$, qui convergent tous les deux vers 0 en α. Le théorème d'encadrement donne alors $\lim\limits_{x \to \alpha} (fg)(x) = 0$. □

Exemple 4. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \to \dfrac{\cos(x)}{x}$.
On sait que $x \to \cos(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ (par -1 et 1), et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ d'après le résultat précédent.

2.4 Prolongement par continuité en x_0

Définition (Prolongement par continuité)**.**

Soit x_0 un réel et f une fonction définie au voisinage de x_0, mais pas en x_0. Si f admet une limite réelle ℓ en x_0, alors on dit que f est **prolongeable par continuité** en x_0. La fonction g, définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \in D_f \\ g(x_0) = \ell \end{cases},$$

est appelée **prolongement par continuité** de f en x_0.

Exemple 5. La fonction $f : x \to \frac{\sin(x)}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ mais pas en 0. Comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1 \in \mathbb{R}$, f est prolongeable par continuité en 0. Son prolongement par continuité est la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{\sin(x)}{x} \text{ si } x \in \mathbb{R}^* \\ g(0) = 1 \end{cases}.$$

2.5 Limites et suites

Proposition (Application des limites aux suites)**.**

Soit α et ℓ des réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$. Soit f une fonction définie au voisinage de α. Si :

1. f admet pour limite ℓ en α,
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels de D_f qui converge vers α,

alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Démonstration. On fait la démonstration pour le cas $\alpha = -\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{-\infty} f = \ell$, il existe un réel $B < 0$ tel que pour tout $x \in D_f$,

$$x \leqslant B \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant B$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in D_f$, on a pour tout $n \geqslant n_0$ que $|f(u_n) - \ell| \leqslant \varepsilon$. Cela signifie que la suite $(f(u_n))_n$ converge vers ℓ. $\square$

Exemple 6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et la fonction sinus est continue en 0, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) = \sin(0) = 0$.

Corollaire (Théorème du point fixe)**.**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et continue en tout point de I. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I définie par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Si la suite u converge vers un réel $\ell \in I$, alors $\ell = f(\ell)$ (on dit alors que ℓ est un point fixe de f).

Démonstration. Par le résultat précédent, comme u converge vers ℓ et f est continue en $\ell \in I$, $f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$. Il suffit alors de passer à la limite dans la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ pour obtenir $\ell = f(\ell)$. □

Exemple 7. On considère la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$. Peut-elle converger ?
On suppose que la suite u converge vers un réel ℓ. La fonction $f : x \to \sqrt{1+x^2}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$, donc en particulier en ℓ, et on a :

$$\ell = \sqrt{1+\ell^2} \Rightarrow \ell^2 = 1 + \ell^2 \Rightarrow 0 = 1.$$

C'est absurde, donc la suite diverge nécessairement.

2.6 Limite d'une fonction composée

Proposition (Limite d'une fonction composée)**.**

Soit α , ℓ_1 et ℓ_2 des réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$. Soit f et g deux fonctions telles que f est définie au voisinage de α et g est définie au voisinage de ℓ_1. Alors :

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell_1 \text{ et } \lim_{x\to\ell_1} g(x) = \ell_2 \Longrightarrow \lim_{x\to\alpha} g \circ f(x) = \ell_2.$$