Matrices et applications linéaires

Cours de É. Bouchet – PCSI

17 mai 2023

Table des matières

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n, p, q seront des entiers de $\mathbb{N}^*$.

1 Matrices d'une application linéaire

1.1 Construction de matrices

Définition 1.1 (Vecteur colonne des coordonnées)

Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, de base B_E. Soit $x \in E$. On appelle **vecteur colonne des coordonnées** de x dans la base B_E le vecteur colonne $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ formé des coordonnées de x dans la base B_E.

Exemple. On considère le polynôme $P(X) = 1 + X^2 + 3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$. Le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base $(1, X, X^2, X^3)$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Remarque. L'ordre des vecteurs dans la base est important.

Définition 1.2 (Matrice d'une famille de vecteurs)

Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, de base B_E. Soit $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_q)$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base B_E la matrice $\mathrm{Mat}_{B_E}(\mathcal{F})$ de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ dont la j-ième colonne est composée des coordonnées du vecteur f_j dans la base B_E.

Remarque. Si $x \in E$, $\mathrm{Mat}_{B_E}(x)$ est la matrice colonne des coordonnées du vecteur x dans la base B_E.

Définition 1.3 (Matrice d'une application linéaire dans des bases)

Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, de base $B_E = (e_1, \ldots, e_p)$ et F un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, de base B_F. Soit f une application linéaire de E dans F. On appelle **matrice de l'application f dans les bases B_E et B_F**, notée $\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(f)$, la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j-ième colonne est composée des coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base B_F.

Remarque. On a donc $\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(f) = \mathrm{Mat}_{B_F}(f(e_1), \ldots, f(e_p))$.

Exercice 1. On considère l'application linéaire f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f((x, y, z)) = (2x + y, 4y, y + z, 6z).$$

On note $B_3 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et B_4 la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer la matrice de l'application f dans les bases B_3 et B_4.
   Solution : On remarque que $f(e_1) = (2, 0, 0, 0)$, $f(e_2) = (1, 4, 1, 0)$ et $f(e_3) = (0, 0, 1, 6)$. Donc :
   $$\mathrm{Mat}_{B_3,B_4}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$
2. Déterminer la matrice de l'application f dans les bases $B_3' = (e_1, e_1 + e_2, e_1 - e_3)$ et B_4.
   Solution : On remarque que $f(e_1) = (2, 0, 0, 0)$, $f(e_1 + e_2) = (3, 4, 1, 0)$ et $f(e_1 - e_3) = (2, 0, -1, -6)$. Donc :
   $$\mathrm{Mat}_{B_3',B_4}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.4 (Matrice d'un endomorphisme dans une base)

Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, de base $B = (e_1, \dots, e_p)$ et f un endomorphisme de E. On appelle **matrice de l'application f dans la base B**, notée $\mathrm{Mat}_B(f)$, la matrice carrée de $M_p(\mathbb{K})$ dont la j-ième colonne est composée des coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base B.

Remarque. Soit $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\mathrm{id}_E(e_i) = e_i$. Donc $\mathrm{Mat}_B(\mathrm{id}_E) = I_p$: c'est l'un des rares cas où la matrice ne dépend pas de la base de E choisie. De même, si $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice de l'homothétie $\lambda\,\mathrm{id}_E$ est λI_p.

Exercice 2. On considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}_3[X]$ qui à un polynôme $P(X)$ associe son polynôme dérivé $P'(X)$. On note B la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer $\mathrm{Mat}_B(g)$.
Solution : On remarque que $g(1) = 0$, $g(X) = 1$, $g(X^2) = 2X$ et $g(X^3) = 3X^2$. Donc :

$$\mathrm{Mat}_B(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on note r la rotation de centre 0 et d'angle θ. Déterminer sa matrice dans la base canonique B.
Solution : (faire le dessin de la rotation et du cercle trigonométrique)
$r((0,1)) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ et $r((1,0)) = (\cos(\frac{\pi}{2} + \theta), \sin(\frac{\pi}{2} + \theta)) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$, d'où la matrice :

$$\mathrm{Mat}_B(r) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.5 (Interprétation matricielle de l'image d'un vecteur)

Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, de base B_E, et F un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, de base B_F. Soit f une application linéaire de E dans F et $A = \mathrm{Mat}_{B_E, B_F}(f)$. Soit $x \in E$, $y \in F$ et X et Y les vecteurs colonnes de leurs coordonnées dans les bases B_E et B_F. On a :

$$y = f(x) \iff Y = AX.$$

Démonstration. On pose $B_E = (e_1, \dots, e_p)$ et $B_F = (f_1, \dots, f_n)$. Comme $x \in E$ et $y \in F$, il existe des scalaires x_j et y_i tels que $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i$. On pose $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$. Par linéarité de f, définition de A, puis interversion des sommes :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \right) f_i.$$

Ce qui nous donne, par identification des coefficients dans la base F puis par définition du produit matriciel :

$$y = f(x) \iff \forall i \in [\![1, n]\!], y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \iff Y = AX.$$

□

Exemple. On réutilise l'application g de dérivation et le polynôme $P(X) = 1 + X^2 + 3X^3$ étudiés précédemment. Alors,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $g(P(X)) = 0 + 2X + 9X^2 + 0X^3 = 2X + 9X^2$. On retrouve ainsi bien l'expression du polynôme dérivé.

1.2 Opérations usuelles

Proposition 1.6 (Isomophisme entre applications linéaires et matrices)

Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, de base B_E et F un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, de base B_F. L'application $\varphi\ :\ f \mapsto \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(f)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Démonstration. On pose $B_E = (e_1, \dots, e_p)$ et $B_F = (f_1, \dots, f_n)$.

— Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F)^2$. On pose $(a_{ij}) = \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(f)$ et $(b_{ij}) = \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(g)$.
$\varphi(\lambda f + g) = \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(\lambda f + g)$ est la matrice dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des vecteurs $(\lambda f + g)(e_j)$ dans la base B_F, on commence donc par calculer ces vecteurs. Soit $j \in [\![1,p]\!]$,

$$(\lambda f + g)(e_j) = \lambda f(e_j) + g(e_j) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i + \sum_{i=1}^{n} b_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{ij} + b_{ij})\, f_i.$$

D'où $\varphi(\lambda f + g) = (\lambda a_{ij} + b_{ij})_{i\in[\![1,n]\!], j\in[\![1,p]\!]} = \lambda\,\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(f) + \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(g) = \lambda\varphi(f) + \varphi(g)$. Donc φ est une application linéaire.

— Montrons maintenant que φ est bijective. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors,

$$A = \varphi(f) \iff A = \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(f) \iff \forall i \in [\![1,p]\!], f(e_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} f_k.$$

Comme l'application linéaire f est définie de manière unique par l'image d'une base de E, il existe bien un unique antécédent f à la matrice A. Donc φ est bijective.

□

Remarque. Ce résultat montre au passage que $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$, résultat qui avait été admis dans le chapitre sur les applications linéaires.

Proposition 1.7 (Matrice d'une composée d'applications linéaires)

Soit E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives B_E, B_F et B_G. Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{B_E,B_G}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{B_F,B_G}(g)\,\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(f)$$

Démonstration. On pose $B_E = (e_1, \dots, e_p)$, $B_F = (f_1, \dots, f_n)$ et $B_G = (g_1, \dots, g_m)$. On pose $(a_{ij}) = \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(f)$ et $(b_{ij}) = \mathrm{Mat}_{B_F,B_G}(g)$. $\mathrm{Mat}_{B_E,B_G}(g\circ f)$ est la matrice dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des vecteurs $g \circ f(e_j)$ dans la base B_G, on va donc commencer par calculer ces vecteurs. Soit $j \in [\![1,p]\!]$,

$$g \circ f(e_j) = g\left(f(e_j)\right) = g\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} g(f_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{m} b_{ki} g_k\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ij}\right) g_k.$$

Or $\sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ij}$ correspond au terme de la k-ième ligne et j-ième colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_{B_F,B_G}(g)\,\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(f)$, par formule du produit matriciel. D'où le résultat. □

Proposition 1.8 (Isomorphismes et inversibilité de matrices)

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, de bases B_E et B_F. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors f est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(f)$ est inversible. Dans ce cas, on a :

$$\mathrm{Mat}_{B_F,B_E}(f^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(f)\right)^{-1}.$$

Remarque. En particulier, si E est un espace vectoriel de base B_E et f un endomorphisme de E, alors f est un automorphisme si et seulement si $\mathrm{Mat}_{B_E}(f)$ est inversible.

Démonstration.
— Supposons que f est bijective. Alors elle admet une réciproque f^{-1} et $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$. En passant aux matrices associées, on trouve :

$$\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(f)\,\mathrm{Mat}_{B_F,B_E}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{B_F}(f \circ f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{B_F}(\mathrm{id}_F) = I_n.$$

De même, $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$ donne $\mathrm{Mat}_{B_F,B_E}(f^{-1})\,\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(f) = I_n$. Donc $\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(f)$ est inversible et $\mathrm{Mat}_{B_F,B_E}(f^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(f))^{-1}$.
— Réciproquement, supposons que $A = \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(f)$ est inversible. Soit g l'unique application linéaire de F dans E telle que $\mathrm{Mat}_{B_F,B_E}(g) = A^{-1}$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{B_E}(g \circ f) = A^{-1}A = I_n = \mathrm{Mat}_{B_E}(\mathrm{id}_E),$$

d'où $g \circ f = \mathrm{id}_E$. Comme E et F sont de même dimension, f est bijective et d'inverse g. Par construction de g, on a de plus $\mathrm{Mat}_{B_F,B_E}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{B_F,B_E}(g) = (\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(f))^{-1}$.

□

Exercice 4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f((x, y)) = (x + 2y, 2x + 2y)$. Montrer qu'il s'agit d'un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et donner l'expression de sa réciproque.
Solution : La matrice de f dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, dont on montre qu'elle est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Donc f est bijective et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f^{-1}((x, y)) = (y - x, \frac{2x-y}{2})$.

2 Rang d'une matrice

2.1 Application linéaire canoniquement associée

Définition 2.1 (Application linéaire canoniquement associée à une matrice)

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **application linéaire canoniquement associée** à A l'application f_A définie de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ par $f_A : X \mapsto AX$.

Remarque. On triche un peu dans cette définition en identifiant $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^p$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^n$, ce qui allège les écritures. Pour passer de l'un à l'autre, il suffit d'écrire le vecteur horizontalement au lieu de verticalement (ou l'inverse).

Démonstration. On vérifie facilement que c'est bien une application linéaire. En effet, soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(X, Y) \in (\mathbb{K}^p)^2$, les propriétés du produit matriciel donnent :

$$f_A(\lambda X + Y) = A(\lambda X + Y) = \lambda AX + AY = \lambda f_A(X) + f_A(Y).$$

□

Remarque. Si on note B_p et B_n les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$, l'application linéaire f_A canoniquement associée à A vérifie $\mathrm{Mat}_{B_p,B_n}(f_A) = A$, d'où son nom.

Exercice 5. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Donner son application linéaire canoniquement associée, qu'on notera f.
Solution : Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 5y + 2z \\ 3y + z \end{pmatrix}$.
Variante : Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on trouve par linéarité de f :

$$f((x, y, z)) = xf((1, 0, 0)) + yf((0, 1, 0)) + zf((0, 0, 1)) = x(2, 0) + y(5, 3) + z(2, 1) = (2x + 5y + 2z, 3y + z).$$

2.2 Noyau, image et rang d'une matrice

Définition 2.2 (Image et noyau d'une matrice)

Soit A une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit f_A son application linéaire canoniquement associée. On appelle **image** (resp. **noyau**) de A l'image (resp. le noyau) de f_A. Autrement dit, $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(f_A)$ et $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(f_A)$.

Remarque. Soit $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de A et $(E_1, \ldots, E_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$. On trouve par produit matriciel : $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(f_A) = \mathrm{Vect}(f_A(E_1), \ldots, f_A(E_p)) = \mathrm{Vect}(AE_1, \ldots, AE_p) = \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$.
Donc $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$

Remarque. Le noyau de A est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène $AX = 0$. On peut donc se baser sur les lignes de la matrice pour déterminer son noyau.

Exercice 6. Déterminer le noyau et l'image de la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.
Solution : L'image vient directement :

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}\right) \quad \text{car } \begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}.$$

Déterminons maintenant le noyau. Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A) &\iff A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 5z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -y - z = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ y + z = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases} \\
&\iff X = \begin{pmatrix}-z\\-z\\z\end{pmatrix} \\
&\iff X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Définition 2.3 (Rang d'une matrice)

Soit A une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **rang** de A et on note $\mathrm{rg}(A)$ le rang de la famille des vecteurs colonnes de A dans $\mathbb{K}^n$.

Exercice 7. Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 5\\1 & 3 & 4\end{pmatrix}$.

Solution : La troisième colonne de A est la somme des deux précédentes, donc $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}\right) = 2$ car ces deux vecteurs forment une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (à montrer).

Proposition 2.4 (Lien entre rang d'une application linéaire et de ses matrices)

Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et de base B_E, F un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et de base B_F, f une application linéaire de E dans F. Soit A la matrice de l'application f dans les bases B_E et B_F. Alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$.

Démonstration. On pose $B_E = (e_1, \ldots, e_p)$. Les colonnes de A sont formées des coordonnées des vecteurs $f(e_i)$ dans la base B_F. Donc par définition du rang d'une matrice, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f(e_1), \ldots, f(e_p))$. Par ailleurs, comme B_E est une base de E, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_p))$. D'où $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(f)$. □

Remarque. Le rang d'une matrice est en particulier égal à celui de son application linéaire canoniquement associée.

Remarque. Le rang d'une application linéaire correspond au rang de n'importe laquelle de ses matrices associées : le choix des bases n'importe pas.

Proposition 2.5 (Matrice de rang n)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$A \text{ est inversible } \iff \mathrm{Ker}(A) = \left\{\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\right\} \iff \mathrm{Im}(A) = \mathbb{K}^n \iff \mathrm{rg}(A) = n.$$

Remarque. $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{K}^n$ signifie entre autres que les colonnes de A engendrent $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. Soit f_A l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A. On sait déjà que A est inversible si et seulement si f_A est bijective.
Or, d'après les propriétés des applications linéaire en dimension finie, un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ est bijectif si et seulement si il est injectif ou surjectif. Donc :

$$f_A \text{ est bijective } \iff \mathrm{Ker}(f_A) = \left\{\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\right\} \iff \mathrm{Im}(f_A) = \mathbb{K}^n \iff \mathrm{rg}(f_A) = n.$$

En passant aux matrices, cela donne exactement :

$$A \text{ est inversible } \iff \mathrm{Ker}(A) = \{(0, \ldots, 0)\} \iff \mathrm{Im}(A) = \mathbb{K}^n \iff \mathrm{rg}(A) = n.$$

□

Remarque. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire. Ses colonnes engendrent $\mathbb{K}^n$ si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. On retrouve donc la condition d'inversibilité rencontrée dans le chapitre sur les matrices.

Proposition 2.6 (Inversibilité d'une matrice à droite ou à gauche)

Toute matrice carrée inversible à droite où à gauche est inversible.

Remarque. Cela justifie les méthodes de calcul d'inverse par obtention d'un inverse à droite ou à gauche utilisées dans le chapitre sur les matrices.

Démonstration. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible à droite. Alors il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$. Soient f_A et f_B les applications linéaires canoniquement associées à A et B. Passer aux applications linéaires dans la relation $AB = I_n$ donne alors $f_A \circ f_B = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$. Or f_A et f_B sont des endomorphismes de $\mathbb{K}^n$. Donc f_A est bijective, de réciproque f_B. Donc A est inversible, d'inverse B.
On procède de même pour les matrices carrées inversibles à gauche. □

Proposition 2.7 (Rang de la transposée)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top)$.

Démonstration. Résultat admis. □

2.3 Lien avec les opérations élémentaires

Proposition 2.8 (Opérations élémentaires sur les lignes et noyau)

Toute opération élémentaire sur les lignes d'une matrice préserve son noyau.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Toute opération élémentaire sur les lignes de A peut être obtenue par multiplication à gauche par une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ (P est une matrice de permutation, de transvection ou de dilatation).
Soit $X \in \mathbb{K}^n$,

$$X \in \mathrm{Ker}(PA) \iff PAX = 0 \iff P^{-1}PAX = P^{-1}0 \iff AX = 0 \iff X \in \mathrm{Ker}(A).$$

Le noyau est donc bien préservé. □

Proposition 2.9 (Opérations élémentaires sur les colonnes et image)

Toute opération élémentaire sur les colonnes d'une matrice préserve son image.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Toute opération élémentaire sur les colonnes de A peut être obtenue par multiplication à droite par une matrice $P \in GL_p(\mathbb{K})$ (P est une matrice de permutation, de transvection ou de dilatation).
Soit $Y \in \mathrm{Im}(AP)$. Alors il existe $X \in \mathbb{K}^p$ tel que $Y = APX = A(PX)$. Donc $Y \in \mathrm{Im}(A)$. Réciproquement, soit $Y \in \mathrm{Im}(A)$. Alors il existe $X \in \mathbb{K}^p$ tel que $Y = AX = APP^{-1}X = AP(P^{-1}X)$. Donc $Y \in \mathrm{Im}(AP)$. On en déduit par double inclusion que $\mathrm{Im}(AP) = \mathrm{Im}(A)$. L'image est donc bien préservée. □

Proposition 2.10 (Opérations élémentaires et rang)

Toute opération élémentaire sur les lignes ou les colonnes d'une matrice en préserve le rang.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Toute opération élémentaire sur les lignes de A peut être obtenue par multiplication à gauche par une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ (P est une matrice de permutation, de transvection ou de dilatation).
Soit f_A et f_P les applications linéaires canoniquement associées à A et à P. Comme P est inversible, f_P est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$, ce qui donne :

$$\mathrm{rg}(PA) = \mathrm{rg}(f_P \circ f_A) = \mathrm{rg}(f_A) = \mathrm{rg}(A).$$

On procède de même pour les opérations élémentaires sur les colonnes en remplaçant la multiplication à gauche par une multiplication à droite.

Rmq : on pouvait aussi se ramener aux propositions précédentes pour montrer le résultat, avec une forme matricielle du théorème du rang. □

Remarque. Ce résultat fournit une méthode concrète pour déterminer le rang d'une matrice, en se ramenant à des matrices de plus en plus petites :
- Si $A = 0$, il est immédiat que $\mathrm{rg}(A) = 0$ (et l'algorithme se termine).
- Sinon, au moins un coefficient est non nul et peut servir de pivot :
  - On le place en haut à gauche par permutation des lignes puis des colonnes (contrairement aux calculs d'inverses ou aux résolutions de système, on peut ici mélanger les opérations sur les lignes et les colonnes).
  - À l'aide de ce pivot, on fait apparaître des 0 sur la première colonne (puis sur la première ligne, mais cette étape n'a pas besoin d'apparaître dans les calculs).

  À ce stade, la première colonne est clairement non combinaison linéaire des autres. On note A' la matrice obtenue en retirant à A sa première ligne et sa première colonne, donc $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A') + 1$.

Cet algorithme termine de manière certaine puisque les tailles des matrices manipulées sont strictement plus petites à chaque étape.

Exercice 8. À l'aide d'opérations élémentaires, déterminer le rang de la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.
Solution :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) && (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \\
&= 1 + \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= 1 + \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) && (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\
&= 2 + \mathrm{rg}\left((0)\right) \\
\mathrm{rg}(A) &= 2
\end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat obtenu dans les exercices précédents.

3 Changements de bases

3.1 Matrice de passage

Définition 3.1 (Matrice de passage)

Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et B, B' deux bases de E. On appelle **matrice de passage de la base B à la base B'** la matrice $\mathrm{Mat}_B(B') = \mathrm{Mat}_{B',B}(\mathrm{id}_E)$, souvent notée $P_B^{B'}$.

Exercice 9. On pose $R_0(X) = 1$, $R_1(X) = X - 1$ et $R_2(X) = (X-1)^2$. Alors $B = (1, X, X^2)$ et $B' = (R_0, R_1, R_2)$ sont deux bases de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Déterminer la matrice de passage de B à B'.
   Solution : $R_0(X) = 1 + 0X + 0X^2$, $R_1(X) = -1 + X + 0X^2$ et $R_2(X) = 1 - 2X + X^2$. On en déduit :
   $$P_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer la matrice de passage de B' à B.
   Solution : $1 = R_0(X)$, $X = X - 1 + 1 = R_0(X) + R_1(X)$ et $X^2 = X^2 - 2X + 1 + 2X - 1 = R_0(X) + 2R_1(X) + R_2(X)$. On en déduit :
   $$P_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.2 (Inversibilité d'une matrice de passage)

Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et B, B' deux bases de E.
Alors $P_B^{B'}$ est une matrice inversible d'inverse $\left(P_B^{B'}\right)^{-1} = P_{B'}^{B}$.

Démonstration. $P_B^{B'}$ est la matrice d'un isomorphisme (l'identité), donc elle est inversible et :

$$\left(P_B^{B'}\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{B',B}(\mathrm{id}_E)^{-1} = \mathrm{Mat}_{B,B'}(\mathrm{id}_E^{-1}) = \mathrm{Mat}_{B,B'}(\mathrm{id}_E) = P_{B'}^{B}.$$

□

3.2 Changements de bases et matrices semblables

Proposition 3.3 (Changement de base pour un vecteur)

Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et B, B' deux bases de E. Soit $x \in E$, on pose $X = \mathrm{Mat}_B(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{B'}(x)$. On a alors

$$X = P_B^{B'} X'.$$

Démonstration. On sait que $x = \mathrm{id}_E(x)$, ce qui donne sous forme matricielle, en utilisant des bases adaptées :

$$X = \mathrm{Mat}_B(\mathrm{id}_E(x)) = \mathrm{Mat}_{B',B}(\mathrm{id}_E)\,\mathrm{Mat}_{B'}(x) = P_B^{B'} X'.$$

□

Exercice 10. À l'aide de l'exemple 9, déterminer les coordonnées de $T(X) = 7 - 3X + 4X^2$ dans la base B'.
<u>Solution :</u> On sait que $\mathrm{Mat}_{B'}(T) = P_{B'}^{B}\,\mathrm{Mat}_B(T)$, donc :

$$\mathrm{Mat}_{B'}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Donc $T(X) = 8R_0(X) + 5R_1(X) + 4R_2(X)$.

Proposition 3.4 (Changements de bases pour une application linéaire)

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies non nulles, B et B' deux bases de E, C et C' deux bases de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{B',C'}(f) = P_{C'}^{C}\,\mathrm{Mat}_{B,C}(f) P_B^{B'}.$$

Démonstration. On sait que $f = \mathrm{id}_F \circ f \circ \mathrm{id}_E$, ce qui donne sous forme matricielle, en choisissant soigneusement les bases :

$$\mathrm{Mat}_{B',C'}(f) = \mathrm{Mat}_{B',C'}(\mathrm{id}_F \circ f \circ \mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{C,C'}(\mathrm{id}_F)\,\mathrm{Mat}_{B,C}(f)\,\mathrm{Mat}_{B',B}(\mathrm{id}_E) = P_{C'}^{C}\,\mathrm{Mat}_{B,C}(f) P_B^{B'}.$$

□

Remarque. Attention, cette formule est différente de la formule de changement de base pour un vecteur.

Proposition 3.5 (Changements de bases pour un endomorphisme)

Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et B, B' deux bases de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{B'}(f) = P_{B'}^{B}\,\mathrm{Mat}_B(f) P_B^{B'}.$$

Démonstration. C'est un cas particulier de la formule précédente. □

Exercice 11. On se place dans le contexte de l'exemple 9. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par :

$$f(aX^2 + bX + c) = aX^2 - (b + 4a)X + 6a + 4b + 3c.$$

Déterminer la matrice de f dans la base B, puis la matrice de f dans la base B'.
Solution : $f(1) = 3$, $f(X) = 4 - X$ et $f(X^2) = 6 - 4X + X^2$, d'où :

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pourrait chercher de même les décompositions des images de B', mais comme on connaît les matrices de passage associées, on trouve par calcul :

$$\mathrm{Mat}_{B'}(f) = P_{B'}^{B} \mathrm{Mat}_B(f) P_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et donc $\mathrm{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
La base B' est plus compliquée à manipuler que B, mais sa matrice est donc bien plus sympathique (notamment en vue d'un calcul d'inverse ou de puissance). Le cours de seconde année fournira des outils pour construire des bases permettant d'obtenir des matrices diagonales.

Définition 3.6 (Matrices semblables)

Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. On dit que les matrices M et N sont **semblables** lorsqu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $M = PNP^{-1}$.

Remarque. $M = PNP^{-1} \iff N = P^{-1}MP$, le côté où l'on met P^{-1} dans la formule n'a donc pas d'importance.

Remarque. Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et B, B' deux bases de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $\mathrm{Mat}_B(f)$ et $\mathrm{Mat}_{B'}(f)$ sont des matrices semblables. En effet, si on pose $P = P_{B'}^{B}$, on a $\mathrm{Mat}_{B'}(f) = P\,\mathrm{Mat}_B(f)P^{-1}$.

4 Application aux systèmes linéaires

Proposition 4.1 (Ensemble des solutions du système homogène)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'ensemble des solutions du système homogène $AX = 0$ est l'espace vectoriel $\mathrm{Ker}(A)$, de dimension $p - \mathrm{rg}(A)$.

Démonstration. Il est immédiat par définition de $\mathrm{Ker}(A)$ que c'est l'ensemble des solutions. On sait déjà que c'est un espace vectoriel, il reste juste à déterminer sa dimension.
Soit f_A l'application linéaire canoniquement associée à A (donc définie sur $\mathbb{K}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{K}^n$), le théorème du rang donne :

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) = \dim(\mathrm{Ker}(f_A)) = p - \mathrm{rg}(f) = p - \mathrm{rg}(A).$$

□

Exercice 12. Déterminer la dimension de l'ensemble des solutions du système linéaire : $(\mathcal{S})\begin{cases} x-2y+z-t=0 \\ 2x-4y-z-3t=0 \\ 5x-10y-z-7t=0 \\ x-2y+4z=0 \end{cases}$

<u>Solution :</u> La matrice associée à $(\mathcal{S})$ est $A=\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \\ 5 & -10 & -1 & -7 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A) &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right) && \begin{cases} L_2 \longleftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3-5L_1 \\ L_4 \longleftarrow L_4-L_1 \end{cases} \\
&= 1+\operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= 1+\operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\right) && C_1 \longleftrightarrow C_3 \\
&= 1+\operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) && \begin{cases} L_2 \longleftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3+L_1 \end{cases} \\
&= 2+\operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
\operatorname{rg}(A) &= 2
\end{aligned}$$

Donc l'espace vectoriel des solutions du système est de dimension $4-2=2$.

Proposition 4.2 (Condition nécessaire et suffisante pour un système compatible)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le système $AX=B$ est compatible si et seulement si $B \in \operatorname{Im}(A)$.

Démonstration. C'est immédiat, puisque les deux sont équivalents à : $\exists X \in \mathbb{K}^n$ tel que $AX=B$. $\square$

Définition 4.3 (Système de Cramer)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le système $AX=B$ est dit de Cramer lorsque A est inversible.

Remarque. Cette définition est indépendante du second membre du système.

Proposition 4.4 (Solution d'un système de Cramer)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Si le système $AX=B$ est de Cramer, alors il possède une unique solution.

Démonstration. Si la matrice A est inversible, $AX=B \iff X=A^{-1}B$, donc le système possède une unique solution. $\square$

Exercice 13. Montrer que le système linéaire $(\mathcal{S})\begin{cases} x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z+\frac{1}{4}t=1 \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z+\frac{1}{4}t=3 \\ \frac{1}{3}z+\frac{1}{4}t=7 \\ \frac{1}{4}t=-1 \end{cases}$ est un système de Cramer.

Solution : La matrice associée au système est $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Elle est inversible car triangulaire sans 0 sur la diagonale. Donc $(\mathcal{S})$ est un système de Cramer et admet un unique quadruplet solution (qu'on déterminerait en remontant les lignes du système puisqu'il est déjà échelonné).