

Matrices et systèmes linéaires

Cours de É. Bouchet – PCSI

8 décembre 2023

Table des matières

1	Ensemble de matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	2
1.1	Définitions	2
1.2	Addition de matrices et multiplication par un scalaire	2
1.3	Matrices $E_{i,j}$	3
1.4	Produit matriciel	4
1.5	Transposée	5
2	Opérations élémentaires	6
2.1	Matrice identité	6
2.2	Opérations élémentaires et matrices associées	6
3	Système linéaire	8
3.1	Définitions	8
3.2	Écriture matricielle d'un système linéaire	8
3.3	Résolution par pivot de Gauss	9
4	Ensemble des matrices carrées	11
4.1	Cas particuliers	11
4.2	Calcul de puissances	12
4.3	Matrices inversibles	13
4.4	Calcul d'inverse par résolution de système	14
4.5	Calcul d'inverse par Pivot de Gauss sur les matrices	15

Dans tout le chapitre, n, p, q désignent des éléments de \mathbb{N}^* et \mathbb{K} désigne l'un des ensembles \mathbb{R} ou \mathbb{C} . On appelle scalaires les éléments de \mathbb{K} , en prévision des chapitres du second semestre.

1 Ensemble de matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

1.1 Définitions

Définition 1.1 (Matrice)

Une **matrice** à n lignes et p colonnes (ou matrice de taille $n \times p$) à coefficients dans \mathbb{K} est un tableau à n lignes et p colonnes d'éléments de \mathbb{K} . Si A est une telle matrice, on note a_{ij} le terme de la i -ième ligne et j -ième colonne :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Remarque. On écrit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, ou plus simplement $A = (a_{ij})$ quand il n'y a pas d'ambiguïté.

Remarque. Quelques cas particuliers importants :

- si $p = n$, A est appelée **matrice carrée** d'ordre n et on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- si $n = 1$, A est appelée **matrice ligne ou vecteur ligne**.
- si $p = 1$, A est appelée **matrice colonne ou vecteur colonne**.
- si $n = 1$ et $p = 1$, A est souvent confondue avec le nombre $a_{11} \in \mathbb{K}$.

Définition 1.2 (Égalité de deux matrices)

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{kl})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq p}}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que les deux matrices A et B sont égales et on note $A = B$ lorsque pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, $a_{ij} = b_{ij}$.

1.2 Addition de matrices et multiplication par un scalaire

Définition 1.3 (Addition de matrices)

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{kl})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq p}}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La somme de A et B est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $A + B = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ avec pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Exemple. On a : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Remarque. Soit A, B et C des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'addition est une opération interne dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui vérifie :

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$,
2. $A + B = B + A$,
3. $A + 0 = A = 0 + A$ en notant 0 la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les termes sont nuls.
4. $A + (-A) = 0 = (-A) + A$ en notant $-A$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le terme de la i -ième ligne et j -ième colonne est $-a_{ij}$.

Définition 1.4 (Multiplication d'une matrice par un scalaire)

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La multiplication externe du scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ par la matrice A , est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $\alpha.A = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ avec pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$c_{ij} = \alpha.a_{ij}.$$

Exemple. On a : $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque. Dans une multiplication entre un scalaire et une matrice, le scalaire doit toujours être écrit à gauche de la matrice.

Remarque. Soit α et β des éléments de \mathbb{K} , et A et B des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La multiplication d'un scalaire par une matrice est définie de $\mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et vérifie :

1. $\alpha.(A + B) = \alpha.A + \alpha.B$,
2. $(\alpha + \beta).A = \alpha.A + \beta.A$,
3. $\alpha.(\beta.A) = (\alpha\beta).A$,
4. $1.A = A$.

1.3 Matrices $E_{i,j}$ **Définition 1.5** (Matrice $E_{i,j}$)

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$. On appelle $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf un 1 à la i -ème ligne et j -ème colonne.

Exemple. Dans $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, on a :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. La notation $E_{i,j}$ ne précise pas la taille de la matrice, juste la position du coefficient non nul. Dans les exercices, on se repose donc sur le contexte pour déterminer le nombre de lignes et de colonnes.

Proposition 1.6 (Décomposition selon les $E_{i,j}$)

Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices $E_{i,j}$.

Démonstration. Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a alors : $A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij} E_{i,j}$. □

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 1E_{1,1} + 2E_{1,2} + 3E_{2,1} + 4E_{2,2} + 5E_{3,1} + 6E_{3,2}.$$

1.4 Produit matriciel

Définition 1.7 (Produit de matrices)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ deux matrices. On appelle produit des matrices A et B et on note AB la matrice $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ qui vérifie : pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}.$$

Exercice 1. Posons $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer AB .

Solution : $AB \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{R})$. Le calcul se fait comme suit :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ** & ** \\ ** & ** \\ ** & ** \\ ** & ** \end{pmatrix}$$

On trouve : $AB = \begin{pmatrix} -15 & 14 \\ -12 & 17 \\ -8 & 26 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$

Remarque. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, le produit matriciel AB correspond à la succession des produit de la matrice A par les vecteurs colonnes de la matrice B .

Remarque. Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A , et les coefficients de la combinaison linéaire sont les coefficients de X .

Exemple. On pose $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. On a : $AX = \begin{pmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} \\ x_1 a_{31} + x_2 a_{32} \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$.

Proposition 1.8 (Propriétés du produit matriciel)

Le produit de matrices vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A + B)C = AC + BC$,
2. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(B, C) \in (\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}))^2$, $A(B + C) = AB + AC$,
3. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, $A(\alpha \cdot B) = \alpha \cdot (AB) = (\alpha \cdot A)B$,
4. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $(AB)C = A(BC)$,

Démonstration. On va montrer le premier résultat, les autres se montrent de la même façon. On note $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ et $C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$. Alors le terme en $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$ de $(A + B)C$ est par définition de la somme et du produit matriciel :

$$\sum_{k=1}^p (a_{ik} + b_{ik})c_{kj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^p b_{ik}c_{kj}.$$

Or, ce nouveau terme est le terme en $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$ de $AC + BC$. D'où le résultat. \square

Remarque. Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$, les deux produits AB et BA sont possibles. ATTENTION : dans le cas général,

$$AB \neq BA.$$

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Alors $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Notons au passage qu'on peut donc trouver A et B deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = 0$.

Définition 1.9 (Symbole de Kronecker)

Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, on définit la notation suivante : $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Proposition 1.10 (Produit de matrices $E_{i,j}$)

Soit $(i, j, k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$, alors $E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$.

Remarque. Dans ce produit matriciel, on a $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $E_{k,l} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $E_{i,l} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.

Démonstration. Le coefficient de la r -ième ligne et s -ième colonne de $E_{i,j}$ est $\delta_{i,r} \delta_{j,s}$.

On pose $E_{i,j} \times E_{k,l} = (a_{rs})_{\substack{1 \leq r \leq n \\ 1 \leq s \leq q}}$ et $\delta_{j,k} E_{i,l} = (b_{rs})_{\substack{1 \leq r \leq n \\ 1 \leq s \leq q}}$. Par formule du produit matriciel, on obtient pour $(r, s) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$:

$$a_{rs} = \sum_{t=1}^p (\delta_{i,r} \delta_{j,t}) (\delta_{k,t} \delta_{l,s}) = \delta_{i,r} \delta_{l,s} \sum_{t=1}^p \delta_{j,t} \delta_{k,t} = \delta_{i,r} \delta_{l,s} (0 + \delta_{j,k} \times 1 + 0) = b_{rs}.$$

D'où le résultat annoncé. □

Exemple. Quand les produits matriciels sont compatibles, on trouve $E_{1,1} \times E_{1,2} = E_{1,2}$, $E_{1,1} \times E_{2,1} = 0$ (la matrice nulle), $E_{1,3} \times E_{3,2} = E_{1,2}$.

1.5 Transposée

Définition 1.11 (Transposée)

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La **matrice transposée** de A est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ notée A^\top qui vérifie :

$$A^\top = (a_{ji})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Exemple. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 1.12 (Transposée de la somme)

Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, on a :

$$(A + B)^\top = A^\top + B^\top.$$

Démonstration. On note $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$. On a alors $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ par définition de la somme de deux matrices. D'où

$$(A + B)^\top = (a_{ji} + b_{ji})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = (a_{ji})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} + (b_{ji})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = A^\top + B^\top.$$

□

Proposition 1.13 (Transposée du produit)

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a :

$$(AB)^\top = B^\top A^\top.$$

Démonstration. On note $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, $A^\top = (a'_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$, $B^\top = (b'_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}}$, $AB = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}}$, $(AB)^\top = (c'_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B^\top A^\top = (d_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Par propriétés de la transposée, pour les valeurs de i et j pour lesquelles les coefficients sont bien définis, $a'_{ij} = a_{ji}$, $b'_{ij} = b_{ji}$ et $c'_{ij} = c_{ji}$. La formule du produit matriciel donne alors, pour tout $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$c'_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^p a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^p b'_{ik} a'_{kj} = d_{ij}.$$

Donc pour tout $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $c'_{ij} = d_{ij}$, c'est-à-dire $(AB)^\top = B^\top A^\top$. \square

2 Opérations élémentaires

2.1 Matrice identité

Définition 2.1 (Matrice identité)

On appelle **matrice identité** de taille n la matrice carrée $I_n \in M_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple. On a $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 2.2 (Produits avec la matrice identité)

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $I_n A = A = A I_p$.

Démonstration. On montre la première égalité, la deuxième se montre de la même façon. On pose $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $I_n A = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, on trouve par formule du produit matriciel :

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n \delta_{i,k} a_{kj} = 0 + 1 \times a_{ij} + 0 = a_{ij}.$$

\square

2.2 Opérations élémentaires et matrices associées

Définition 2.3 (Opérations élémentaires)

On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes d'une matrice les opérations suivantes :

1. échange de deux lignes L_i et L_j avec $i \neq j$, codifiée : $L_i \longleftrightarrow L_j$.
2. multiplication de la ligne L_i par $\lambda \in \mathbb{K}^*$, codifiée : $L_i \longleftarrow \lambda L_i$.
3. addition de la ligne L_i et d'un multiple de L_j avec $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, codifiée : $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$.

Définition 2.4 (Matrice de permutation)

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. On appelle **matrice de permutation** la matrice $P_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ obtenue en effectuant l'opération $L_i \longleftrightarrow L_j$ sur la matrice identité I_n :

$$P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}.$$

Exemple. Dans le cas $n = 3$,

$$P_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 2.5 (Matrice de dilatation)

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. On appelle **matrice de dilatation** la matrice $D_i(\lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ obtenue en effectuant l'opération $L_i \longleftarrow \lambda L_i$ sur la matrice identité I_n :

$$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}.$$

Exemple. Dans le cas $n = 3$,

$$D_1(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2(3i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_3(\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Définition 2.6 (Matrice de transvection)

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On appelle **matrice de transvection** la matrice $T_{i,j}(\alpha) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ obtenue en effectuant l'opération $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$ sur la matrice identité I_n :

$$T_{i,j}(\alpha) = I_n + \alpha E_{i,j}.$$

Exemple. Dans le cas $n = 3$,

$$T_{1,2}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{1,3}(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{3,1}(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{2,3}(4i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.7 (Opérations élémentaires et produit matriciel)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Les produits matriciels $P_{i,j}A$, $D_i(\lambda)A$ et $T_{i,j}(\alpha)A$ reviennent à effectuer les opérations élémentaires $L_i \longleftrightarrow L_j$, $L_i \longleftarrow \lambda L_i$ et $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$ sur la matrice A .

Démonstration. Il suffit de revenir à la décomposition des matrices $P_{i,j}A$, $D_i(\lambda)A$ et $T_{i,j}(\alpha)A$ en fonction de I_n et des matrices E_{ij} . On constate ensuite que le produit $E_{ij}A$ ne contient que des 0, sauf à la i -ème ligne, qui contient les valeurs de la j -ième ligne de A . Cela permet de conclure. \square

Exemple. On trouve par calcul :

$$P_{1,2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. En multipliant à droite plutôt qu'à gauche, les mêmes opérations s'appliqueraient aux colonnes plutôt qu'aux lignes. Traditionnellement, on a plus tendance à travailler sur les lignes.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z - t = 1 \\ -3z - t = 1 \\ 0 = -2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Le système (S_1) n'a donc pas de solution.

Exercice 3. Résoudre dans \mathbb{R}^4 le système (S_2)
$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 1 \\ 2x - 4y - z - 3t = 3 \\ 5x - 10y - z - 7t = 7 \\ x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

Solution :

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, $(S_2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \\ 5 & -10 & -1 & -7 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z - t = 1 \\ -3z - t = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} + \frac{4\lambda}{3} + 2\mu \\ y = \mu \in \mathbb{R} \\ z = -\frac{1+\lambda}{3} \\ t = \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Le système (S_2) admet donc une infinité de solutions : les quadruplets sous la forme $(\frac{4}{3} + \frac{4\lambda}{3} + 2\mu, \mu, -\frac{1+\lambda}{3}, \lambda)$ avec λ et μ deux réels.

Exercice 4. Résoudre dans \mathbb{R}^4 le système (S_3)
$$\begin{cases} 2a - b + 5d = 0 \\ -3a + b - c - 8d = 0 \\ a + c + 3d = 0 \end{cases}$$

Solution :

Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, $(S_3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow L_1 \leftrightarrow L_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 & -8 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + c + 3d = 0 \\ b + 2c + d = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3\lambda - \mu \\ b = -\lambda - 2\mu \\ c = \mu \in \mathbb{R} \\ d = \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

Le système (S_3) admet donc une infinité de solutions : les quadruplets sous la forme $(-3\lambda - \mu, -\lambda - 2\mu, \mu, \lambda)$ avec λ et μ deux réels.

4 Ensemble des matrices carrées

4.1 Cas particuliers

Définition 4.1 (Matrices triangulaires)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que :

- A est une matrice **triangulaire supérieure** lorsque pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i > j \implies a_{ij} = 0$.
- A est une matrice **triangulaire inférieure** lorsque pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i < j \implies a_{ij} = 0$.
- A est une matrice **diagonale** lorsque pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i \neq j \implies a_{ij} = 0$.

Remarque. Quand A est une matrice diagonale, on note parfois $A = \text{Diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

Remarque. Les matrices diagonales de type λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$ sont aussi appelées **matrices scalaires**.

Exemple. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \text{Diag}(1, 0, 3)$ est une matrice diagonale.

Proposition 4.2 (Produit de matrices triangulaires)

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

- Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
- Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.
- Le produit de deux matrices $A = \text{Diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $B = \text{Diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$ est la matrice diagonale $AB = \text{Diag}(a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n)$.

Démonstration. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ deux matrices triangulaires supérieures. Notons $C = AB$, avec $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Par définition du produit matriciel, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Soit i et j deux entiers tels que $i > j$. Alors si $k < i$, $a_{ik} = 0$, et si $k > j$, $b_{kj} = 0$. Donc $a_{ik} b_{kj} = 0$ pour tous les termes de la somme. Donc $c_{ij} = 0$. Donc C est triangulaire supérieure.

On montre de même le résultat sur les matrices triangulaires inférieures.

Pour le résultat sur les matrices diagonales, par ce qui précède, il est direct que le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale. Il suffit donc de calculer les termes diagonaux. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{ik} b_{ki} = 0$ si $k > i$ ou $k < i$. Donc $c_{ii} = a_{ii} b_{ii}$. \square

Définition 4.3 (Matrices symétriques, antisymétriques)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que :

- A est une matrice **symétrique** lorsque $A^\top = A$, c'est-à-dire $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{ij} = a_{ji}$.
- A est une matrice **antisymétrique** lorsque $A^\top = -A$, c'est-à-dire $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{ij} = -a_{ji}$.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de taille n .

Exemple. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice antisymétrique.

Remarque. Une matrice antisymétrique a nécessairement des zéros sur sa diagonale.

4.2 Calcul de puissances**Proposition 4.4** (Formule du binôme de Newton)

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_p(\mathbb{K}))^2$ tels que $AB = BA$ et soit $m \in \mathbb{N}$,

$$(A + B)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k B^{m-k},$$

où A^k est la matrice $\underbrace{AA \dots A}_{k \text{ fois}}$ produit matriciel de A par elle-même k fois, avec la convention $A^0 = I_p$.

Remarque. Attention à ne pas oublier la condition $AB = BA$, qui ne figurait pas dans la formule pour les réels ! Si $AB \neq BA$, on trouve par exemple en développant $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$.

Démonstration. Soit $m \in \mathbb{N}$. On pose $P(m) = \llcorner (A + B)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k B^{m-k} \lrcorner$.

- $(A + B)^0 = I_p$ et $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} A^k B^{-k} = 1 I_p I_p = I_p$ donc $P(0)$ est vraie.
- Soit m un entier naturel fixé. On suppose que $P(m)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} (A + B)^{m+1} &= (A + B) \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k B^{m-k} && \text{par } P(m) \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^{k+1} B^{m-k} + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} B A^k B^{m-k} && \text{en développant} \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^{k+1} B^{m-k} + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k B^{m-k+1} && \text{car } AB = BA \\ &= \sum_{i=1}^{m+1} \binom{m}{i-1} A^i B^{m-i+1} + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k B^{m-k+1} && \text{en posant } i = k + 1 \\ &= A^{m+1} + B^{m+1} + \sum_{k=1}^m \left(\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} \right) A^k B^{m-k+1} && \text{en séparant } k = 0, m + 1 \\ &= A^{m+1} + B^{m+1} + \sum_{k=1}^m \binom{m+1}{k} A^k B^{m-k+1} && \text{par la formule de Pascal} \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} A^k B^{m-k+1} \end{aligned}$$

Donc $P(m + 1)$ est vraie. D'où le résultat annoncé. □

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les puissances n -ièmes de : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P(n) : J^n = 3^{n-1} J$.

- $J^1 = 3^0 J$ donc $P(1)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $P(n)$ est vraie. Un calcul donne $J^2 = 3J$, donc :

$$J^{n+1} = J^n J = 3^{n-1} J J = 3^{n-1} 3J = 3^n J.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n .

Solution : Raisonner par conjecture puis récurrence n'est pas concluant ici (la conjecture est trop difficile). Par contre $A = 2I_2 + 3J$, avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On connaît les puissances de I_2 et on trouve par calcul que $J^2 = 0_2$, donc $\forall k \geq 2$ $J^k = 0_2$. De plus $2I_2 3J = 6J = 3J 2I_2$.

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton : $\forall n \geq 1$,

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (3J)^k (2I_2)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k 2^{n-k} J^k = 1 \times 3^0 2^n I_2 + n \times 3^1 2^{n-1} J + 0_2 = \begin{pmatrix} 2^n & 3n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

4.3 Matrices inversibles

Définition 4.5 (Matrice inversible)

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** quand il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $AB = BA = I_n$.

Cette matrice est alors unique et notée $B = A^{-1}$.

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est appelé groupe linéaire et noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Montrons l'unicité. Supposons que B et C sont deux matrices qui conviennent. Alors $AB = I_n$, donc par produit avec C , $CAB = C$. Or $CA = I_n$. Donc $B = C$, d'où l'unicité. \square

Remarque. On montrera plus tard dans l'année qu'il suffit de vérifier $AB = I_n$ ou $BA = I_n$ pour garantir l'inversibilité. Cela permet d'alléger les démonstrations.

Remarque. Attention : même si multiplier par l'inverse d'une matrice permet de « neutraliser » la multiplication par cette matrice, l'inverse A^{-1} ne doit jamais être écrit sous la forme d'une fraction.

Proposition 4.6 (Inverse de l'inverse)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Démonstration. On a $A^{-1}A = I_n$, donc A^{-1} est inversible et son inverse vaut A . \square

Proposition 4.7 (Inverse du produit)

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles. Alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Démonstration. On a $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}I_n B = B^{-1}B = I_n$. Donc AB est inversible d'inverse $B^{-1}A^{-1}$. \square

Remarque. On en déduit par récurrence que si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}$, alors $A^k \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

Proposition 4.8 (Inverse de la transposée)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Alors A^\top est inversible et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

Démonstration. On a $(A^{-1})^\top A^\top = (AA^{-1})^\top = I_n^\top = I_n$. Donc A^\top est inversible, d'inverse $(A^{-1})^\top$. \square

Exercice 7. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^2 + A = I_2$. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1} .

Solution : $A(A + I_2) = I_2$, donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = A + I_2$.

4.4 Calcul d'inverse par résolution de système

Proposition 4.9 (Résolution de système dans le cas d'une matrice inversible)

Soit (S) un système linéaire de forme matricielle $AX = B$. Si la matrice A est inversible, le système (S) possède un unique n -uplet solution $X = A^{-1}B$.

Démonstration. Si A est inversible, on peut multiplier $AX = B$ à gauche par A^{-1} , ce qui donne le résultat annoncé. \square

Remarque. Si le système linéaire n'a pas de solution ou admet plusieurs solutions, la matrice associée n'est donc pas inversible (par contraposée).

Remarque. Cette constatation permet d'étudier l'inversibilité d'une matrice par résolution de système linéaire : on fixe un vecteur colonne B quelconque et on résout $AX = B$. Dans le cas inversible, l'expression de la solution permet de déduire la valeur de A^{-1} .

Exercice 8. Étudier l'inversibilité de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ par résolution de système.

Solution : On pose $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Le calcul qui suit peut être effectué sous forme matricielle si on le souhaite.

$$\begin{aligned} AX = B &\iff \begin{cases} x + 3z = b_1 \\ 2x + y + 2z = b_2 \\ -x + y + z = b_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} x + 3z = b_1 \\ y - 4z = -2b_1 + b_2 \\ y + 4z = b_1 + b_3 \end{cases} \\ &\iff L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \begin{cases} x + 3z = b_1 \\ y - 4z = -2b_1 + b_2 \\ 8z = 3b_1 - b_2 + b_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système est échelonné, il ne reste plus qu'à le remonter :

$$\begin{aligned} AX = B &\iff \begin{matrix} L_1 \leftarrow 3L_3 - 8L_1 \\ L_2 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{matrix} \begin{cases} -8x = b_1 - 3b_2 + 3b_3 \\ 2y = -b_1 + b_2 + b_3 \\ 8z = 3b_1 - b_2 + b_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{-1}{8}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{8}L_3 \end{matrix} \begin{cases} x = -\frac{1}{8}b_1 + \frac{3}{8}b_2 - \frac{3}{8}b_3 \\ y = -\frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{2}b_3 \\ z = \frac{3}{8}b_1 - \frac{1}{8}b_2 + \frac{1}{8}b_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$.

Proposition 4.10 (Inversibilité d'une matrice triangulaire)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire. Alors A est inversible si et seulement si elle n'a pas de 0 sur sa diagonale et si elle est inversible, son inverse est aussi triangulaire.

Démonstration. On effectue la démonstration dans le cas triangulaire supérieur, le cas triangulaire inférieur s'en déduit ensuite par passage à la transposée.

On pose $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Puisque si $i > j$, $a_{ij} = 0$ (la matrice A étant triangulaire supérieure), une résolution de système donne :

$$AX = B \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{kk}x_k + \dots + a_{kn}x_n = b_k \\ \vdots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Ce système étant déjà échelonné, il suffit de remonter ses lignes pour le résoudre :

- Si $a_{nn} = 0$, la dernière ligne devient $0 = b_n$, donc le système n'aura pas une unique solution. Donc A n'est pas inversible.
- Si $a_{nn} \neq 0$,

$$AX = B \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} = b_1 - a_{1,n} \frac{b_n}{a_{nn}} \\ \vdots \\ a_{kk}x_k + \dots + a_{k,n-1}x_{n-1} = b_k - a_{k,n} \frac{b_n}{a_{nn}} \\ \vdots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} = b_{n-1} - a_{n-1,n} \frac{b_n}{a_{nn}} \\ x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

- Si $a_{n-1,n-1} = 0$, l'avant dernière ligne devient $0 = b_{n-1} - a_{n-1,n} \frac{b_n}{a_{nn}}$, donc A n'est pas inversible.
- Si $a_{n-1,n-1} \neq 0$, on recommence...

En remontant jusqu'au bout, on déduit que si l'un des a_{kk} est nul, la matrice A n'est pas inversible. Si les coefficients diagonaux sont tous non nuls, la résolution du système donne x_n en fonction de b_n , x_{n-1} en fonction de b_n et b_{n-1} , ..., x_k en fonction de b_n, b_{n-1}, \dots, b_k , et x_1 en fonction de tous les b_i . On obtient donc une unique solution au système.

Donc A est inversible et les dépendances en fonction des b_i garantissent de plus que A^{-1} est triangulaire supérieure. \square

Remarque. En particulier, si D est une matrice diagonale et inversible, son inverse est aussi une matrice diagonale.

Exemple. La matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est inversible puisqu'elle n'a pas de zéro sur la diagonale et $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4.5 Calcul d'inverse par Pivot de Gauss sur les matrices

Proposition 4.11 (Inversibilité des matrices associées aux opérations élémentaires)

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Les matrices $P_{i,j}$, $D_i(\lambda)$ et $T_{i,j}(\alpha)$ sont inversibles.

Démonstration. Les opérations élémentaires associées permettent de conjecturer les valeurs des inverses :

- $P_{i,j}P_{i,j} = I_n$, donc $P_{i,j}$ est inversible et $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$.
- $D_i(\lambda)D_i(\frac{1}{\lambda}) = I_n$ donc $D_i(\lambda)$ est inversible et $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\frac{1}{\lambda})$ (on comprend au passage pourquoi on impose $\lambda \neq 0$).
- $T_{i,j}(\alpha)T_{i,j}(-\alpha) = I_n$ donc $T_{i,j}(\alpha)$ est inversible et $T_{i,j}(\alpha)^{-1} = T_{i,j}(-\alpha)$.

\square

Proposition 4.12 (Inversibilité des matrices modifiées par opérations élémentaires)

Les opérations élémentaires sur les matrices préservent l'inversibilité.

Démonstration. Si A est une matrice inversible, la matrice obtenue après avoir réalisé une opération élémentaire sur les lignes est du type $P_{i,j}A$, $D_i(\lambda)A$ ou $T_{i,j}(\alpha)A$, elle est donc toujours inversible comme produit de matrices inversibles. \square

Remarque. En modifiant l'égalité $A = I_n A$ par produits à gauche, on peut effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de A et I_n . Si on parvient à se ramener à une égalité du type $I_n = BA$, on aura montré que A est inversible avec $A^{-1} = B$.

Si au contraire les opérations élémentaires transforment A en une matrice (triangulaire) non inversible, on aura montré que A n'est pas inversible.

Remarque. Les opérations effectuées sur les matrices sont les mêmes que dans le cas de la résolution par système linéaire, seule la mise en forme change.

Exercice 9. Étudier l'inversibilité de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Solution :

$$\begin{aligned} B = I_3 B &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B \\ &\iff \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} B \\ &\iff L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} B \end{aligned}$$

La matrice triangulaire obtenue a l'un de ses termes diagonaux nul, elle n'est donc pas inversible. Donc B n'est pas non plus une matrice inversible.

Exercice 10. Étudier l'inversibilité de la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Solution :

$$\begin{aligned} C = I_3 C &\iff \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C \\ &\iff L_1 \leftrightarrow L_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C \\ &\iff L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} C \\ &\iff L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} C \\ &\iff L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 9/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 3/2 & -3 & 1 \end{pmatrix} C \end{aligned}$$

La matrice triangulaire n'a aucun zéro sur la diagonale, donc C est inversible. On cherche maintenant C^{-1} .

$$\begin{aligned}
 C = I_3 C &\iff L_3 \leftarrow \frac{2}{9} L_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & 2/9 \end{pmatrix} C \\
 &\iff \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{4} L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 5/3 & -2/9 \\ 0 & 1/2 & -1/6 \\ 1/3 & -2/3 & 2/9 \end{pmatrix} C \\
 &\iff L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \quad I_3 = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 1/9 \\ 0 & 1/2 & -1/6 \\ 1/3 & -2/3 & 2/9 \end{pmatrix} C
 \end{aligned}$$

On en déduit que $C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$.