Matrices

Cours de É. Bouchet – ECS1

20 novembre 2020

Table des matières

Dans tout le chapitre, n, p, q désignent des éléments de $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ désigne l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Ensemble de matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

1.1 Premières définitions

Définition (Matrice)**.**

Une **matrice** à n lignes et p colonnes (ou matrice de taille $n \times p$) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau à n lignes et p colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$. Si A est une telle matrice, on note a_{ij} le terme de la i-ième ligne et j-ième colonne :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & .. & .. & a_{1p} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{i1} & a_{i2} & .. & .. & .. & a_{ip} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & .. & .. & a_{np} \end{pmatrix}$$

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On écrit

$$A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$$

ou plus simplement $A = (a_{ij})$ quand il n'y a pas d'ambiguïté.

Remarque. Quelques cas particuliers importants :
- si $p = n$, A est appelée matrice carrée d'ordre n et on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- si $n = 1$, A est appelée matrice ligne ou vecteur ligne.
- si $p = 1$, A est appelée matrice colonne ou vecteur colonne.
- si $n = 1$ et $p = 1$, A est souvent confondue avec le nombre $a_{11} \in \mathbb{K}$.

Définition (Égalité de deux matrices)**.**

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$ et $B = (b_{kl})_{1 \leqslant k \leqslant n, 1 \leqslant l \leqslant p}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que les deux matrices A et B sont égales et on note $A = B$ lorsque pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, $a_{ij} = b_{ij}$.

Définition (Transposée)**.**

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La **matrice transposée** de A est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ notée ${}^tA$ qui vérifie :

$${}^tA = (a_{ji})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$$

Exemple 1. ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2 Matrices carrées

Définition (Matrices triangulaires)**.**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. On dit que :

— A est une matrice **triangulaire supérieure** lorsque pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$i > j \Longrightarrow a_{ij} = 0.$$

— A est une matrice **triangulaire inférieure** lorsque pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$i < j \Longrightarrow a_{ij} = 0.$$

— A est une matrice **diagonale** lorsque pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$i \neq j \Longrightarrow a_{ij} = 0.$$

On note alors parfois $A = \mathrm{Diag}\,(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$.

— La **matrice identité** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice diagonale $I_n = \mathrm{Diag}\,(1,1,\ldots,1)$.

Exemple 2. On a :

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(1,0,3)$ est une matrice diagonale.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

Définition (Matrices symétriques, antisymétriques)**.**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. On dit que :

— A est une matrice **symétrique** lorsque ${}^tA = A$, c'est-à-dire pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

— A est une matrice **antisymétrique** lorsque ${}^tA = -A$, c'est-à-dire pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$a_{ij} = -a_{ji}.$$

Exemple 3. On a :

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique.

$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice antisymétrique.

2 Opérations dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

2.1 Addition de matrices et multiplication par un scalaire

Définition (Addition de matrices)**.**

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ et $B = (b_{kl})_{1\leqslant k\leqslant n, 1\leqslant l\leqslant p}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La somme de A et B est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $A + B = (c_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ avec pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Exemple 4. On a :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarque. Soit A, B et C des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'addition est une opération interne dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui vérifie :

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$,
2. $A + B = B + A$,
3. $A + 0 = 0 + A = A$ en notant 0 la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les termes sont nuls.
4. $A + (-A) = (-A) + A = 0$ en notant $-A$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le terme de la i-ième ligne et j-ième colonne est $-a_{ij}$.

Remarque. La transposée de la somme est la somme des transposées.

Définition (Multiplication d'une matrice par un scalaire)**.**

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La multiplication externe du scalaire α par la matrice A, est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $\alpha.A = (c_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ avec pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$,

$$c_{ij} = \alpha.a_{ij}.$$

Exemple 5. On a :
$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque. Soit α et β des éléments de $\mathbb{K}$, et A et B des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La multiplication d'un scalaire par une matrice est définie de $\mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et vérifie :

1. $\alpha.(A + B) = \alpha.A + \alpha.B$,
2. $(\alpha + \beta).A = \alpha.A + \beta.A$,
3. $\alpha.(\beta.A) = (\alpha\beta).A$,
4. $1.A = A$.

Proposition.

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, muni de l'addition de deux matrices et de la multiplication d'un scalaire par une matrice, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2.2 Produit matriciel

Définition (Produit de matrices)**.**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ deux matrices. On appelle produit des matrices A et B et on note AB la matrice $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ qui vérifie : pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Exemple 6. Posons $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Alors $AB \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{R})$. Le calcul de AB se fait comme suit :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 \\ \boxed{0} & -5 \\ \boxed{-3} & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ \boxed{0} & \boxed{-1} & \boxed{4} \\ 1 & -3 & 3 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ** & ** \\ \boxed{**} & ** \\ ** & ** \\ ** & ** \end{pmatrix} \end{array}$$

On trouve : $AB = \begin{pmatrix} -15 & 14 \\ -12 & 17 \\ -8 & 26 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$

Remarque. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, le produit matriciel AB correspond à la succession des produit de la matrice A par les vecteurs colonnes de la matrice B.

Proposition (Propriétés du produit matriciel)**.**

Le produit de matrices vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tout $(A,B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A+B)\,C = AC + BC$,
2. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(B,C) \in (\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}))^2$, $A\,(B+C) = AB + AC$,
3. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, $A\,(\alpha.B) = \alpha.\,(AB) = (\alpha.A)\,B$,
4. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $(AB)\,C = A\,(BC)$,
5. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $I_n A = A I_p = A$.

Démonstration. On va montrer le premier résultat, les autres se montrent de la même façon. On note $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ $B = (b_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ et $C = (c_{ij})_{1\leqslant i\leqslant p, 1\leqslant j\leqslant q}$. Alors le terme en $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,q]\!]$ de $(A+B)\,C$ est par définition de la somme et du produit matriciel :

$$\sum_{k=1}^{p} (a_{ik} + b_{ik}) c_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} c_{kj} + \sum_{k=1}^{p} b_{ik} c_{kj}.$$

Or, ce nouveau terme est le terme en $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,q]\!]$ de $AC + BC$. D'où le résultat. □

Remarque. Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les deux produits AB et BA sont possibles. ATTENTION : dans le cas général,

$$AB \neq BA.$$

Exemple 7. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Alors :

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Notons au passage qu'on peut donc trouver A et B deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = 0$.

Proposition (Produit de matrices triangulaires)**.**

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

- Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
- Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.
- Le produit de deux matrices $A = \mathrm{Diag}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $B = \mathrm{Diag}\,(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ est la matrice diagonale $AB = \mathrm{Diag}\,(a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n)$.

Démonstration. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n}$ deux matrices triangulaires supérieures. Notons $C = AB$, avec $C = (c_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n}$. Par définition du produit matriciel, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Soit i et j deux entiers tels que $i > j$. Alors si $k < i$, $a_{ik} = 0$, et si $k > j$, $b_{kj} = 0$. Donc $a_{ik}b_{kj} = 0$ pour tous les termes de la somme. Donc $c_{ij} = 0$. Donc C est triangulaire supérieure.
On montre de même le résultat sur les matrices triangulaires inférieures.
Pour le résultat sur les matrices diagonales, par ce qui précède, il est direct que le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale. Il suffit donc de calculer les termes diagonaux. Soit i un entier, $a_{ik}b_{ki} = 0$ si $k > i$ ou $k < i$. Donc $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$. □

Théorème (Formule du binôme de Newton)**.**

Pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_p(\mathbb{K}))^2$ tels que $AB = BA$ et pour tout entier naturel m,

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k},$$

où A^k est la matrice $\underbrace{AA\ldots A}_{k \text{ fois}}$ produit matriciel de A par elle-même k fois, avec la convention $A^0 = I_p$.

Remarque. Attention à ne pas oublier la condition $AB = BA$, qui ne figurait pas dans la formule pour les réels !

Exemple 8. Si $AB \neq BA$, que vaut $(A+B)^2$?
On trouve en développant $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$.

Démonstration. (démonstration à connaître) Soit $m \in \mathbb{N}$. On pose $P(m) =$ « $(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$ ».

- $(A+B)^0 = I_p$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} A^k B^{-k} = 1 I_p I_p = I_p$ donc $P(0)$ est vraie.
- Soit m un entier naturel fixé. On suppose que $P(m)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned}
(A+B)^{m+1} &= (A+B)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}A^kB^{m-k} && \text{par } P(m)\\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}A^{k+1}B^{m-k} + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}BA^kB^{m-k} && \text{en développant}\\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}A^{k+1}B^{m-k} + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}A^kB^{m-k+1} && \text{car } AB=BA\\
&= \sum_{i=1}^{m+1}\binom{m}{i-1}A^iB^{m-i+1} + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}A^kB^{m-k+1} && \text{en posant } i=k+1\\
&= A^{m+1}+B^{m+1}+\sum_{k=1}^{m}\left(\binom{m}{k-1}+\binom{m}{k}\right)A^kB^{m-k+1} && \text{en séparant } k=0, m+1\\
&= A^{m+1}+B^{m+1}+\sum_{k=1}^{m}\binom{m+1}{k}A^kB^{m-k+1} && \text{par la formule de Pascal}\\
&= \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}A^kB^{m-k+1}
\end{aligned}$$

Donc $P(m+1)$ est vraie. D'où le résultat annoncé. □

Exemple 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n.

On pourrait commencer par calculer $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ puis éventuellement A^3 et A^4 pour former une conjecture mais ce n'est pas particulièrement concluant dans ce cas particulier (le coefficient en haut à droite est trop difficile à conjecturer).

On remarque par contre que $A = 2I_2 + 3J$, avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On connaît les puissances de I_2.

On trouve par calcul que $J^2 = 0_2$ et donc $\forall k \geqslant 2$ $J^k = 0_2$.

De plus $2I_2 3J = 6J = 3J 2I_2$ donc ces matrices commutent.

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton : $\forall n \geqslant 1$,

$$A^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(3J)^k(2I_2)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k2^{n-k}J^k = 1\times 3^0 2^n I_2 + n\times 3^1 2^{n-1} J + 0_2 \; = \begin{pmatrix} 2^n & 3n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Proposition (Transposée du produit)**.**

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a :

$$^t(AB) = {}^tB\,{}^tA.$$

Démonstration. (démonstration à connaître) On note $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ ${}^t A = (a'_{ij})_{1\leqslant i\leqslant p, 1\leqslant j\leqslant n}$ $B = (b_{ij})_{1\leqslant i\leqslant p, 1\leqslant j\leqslant q}$ ${}^t B = (b'_{ij})_{1\leqslant i\leqslant q, 1\leqslant j\leqslant p}$ $AB = (c_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant q}$ ${}^t(AB) = (c'_{ij})_{1\leqslant i\leqslant q, 1\leqslant j\leqslant n}$ et ${}^t B\, {}^t A = (d_{ij})_{1\leqslant i\leqslant q, 1\leqslant j\leqslant n}$.
Par propriétés de la transposée, pour les valeurs de i et j pour lesquelles les coefficients sont bien définis, $a'_{ij} = a_{ji}$, $b'_{ij} = b_{ji}$ et $c'_{ij} = c_{ji}$.
La formule du produit matriciel donne alors, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$,

$$c'_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{p} b'_{ik} a'_{kj} = d_{ij}.$$

Donc pour tout $i \in [\![1, q]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$, $c'_{ij} = d_{ij}$, c'est-à-dire ${}^t(AB) = {}^t B\, {}^t A$ puisque tous leurs coefficients sont égaux. □

3 Inversibilité d'une matrice carrée

3.1 Inversibilité d'une matrice de taille 2

Définition (Matrice inversible)**.**

Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On dit que A est **inversible** quand il existe une matrice B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telle que :

$$AB = BA = I_2.$$

Cette matrice est alors unique et on note $B = A^{-1}$.

Remarque. On admet qu'il suffit de vérifier une seule des deux conditions $AB = I_2$ et $BA = I_2$.

Démonstration. Montrons l'unicité. Supposons que B et C sont deux matrices qui conviennent. Alors $AB = I_2$, donc par produit avec C, $CAB = C$. Or $CA = I_2$. Donc $B = C$, d'où l'unicité. □

Théorème (Inverse d'une matrice de taille 2)**.**

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$. La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et on a alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On admet que la matrice n'est pas inversible quand $ad - bc = 0$. Quand $ad - bc \neq 0$, il suffit de faire le produit :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ dc - dc & -bc + da \end{pmatrix} = I_2.$$

Donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. □

Exemple 10. On étudie $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $1 \times 2 - 0 \times 3 = 2 \neq 0$ donc la matrice est inversible et on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2 Inversibilité d'une matrice : cas général

Définition (Matrice inversible, cas général)**.**

Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **inversible** quand il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AB = BA = I_n.$$

Cette matrice est alors unique, et on note $B = A^{-1}$. L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Remarque. On admet qu'il suffit de vérifier une seule des deux conditions $AB = I_n$ et $BA = I_n$.

Remarque. L'unicité se montre comme dans le cas des matrices de taille 2.

Proposition (Inverse du produit)**.**

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles. Alors AB est inversible, et son inverse est donné par :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Démonstration. (démonstration à connaître) On a $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$. Donc AB est inversible d'inverse $B^{-1}A^{-1}$. □

Proposition (Inverse de la transposée)**.**

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Alors ${}^tA$ est inversible, et son inverse est donné par :

$$\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t(A^{-1}).$$

Démonstration. On a ${}^t(A^{-1})\,{}^tA = {}^t\left(AA^{-1}\right) = {}^tI_n = I_n$. Donc ${}^tA$ est inversible, d'inverse ${}^t(A^{-1})$. □

3.3 Méthode du Pivot de Gauss

La détermination de l'inversibilité d'une matrice carrée A et (quand elle est inversible) le calcul de l'inverse se font par la méthode du Pivot de Gauss. Cette méthode consiste à effectuer des opérations dites "élémentaires" sur les lignes de A et I_n jusqu'à obtenir l'inverse éventuel de la matrice A.
Le point de départ est l'égalité $A = I_nA$, qu'on modifie en raisonnant par équivalences jusqu'à obtenir une égalité du type $I_n = BA$. On a alors $A^{-1} = B$.

Définition (Opérations élémentaires autorisées pour le pivot de Gauss)**.**

Les seules transformations "élémentaires" autorisées sur les lignes de chaque matrice sont :

1. la permutation de deux lignes, que l'on note : $L_i \longleftrightarrow L_j$.
2. la combinaison linéaire de deux lignes, avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $\beta \in \mathbb{K}$, que l'on note : $L_i \longleftarrow \alpha L_i + \beta L_j$.

Remarque. Attention, dans le cas d'une combinaison linéaire, il est nécessaire de vérifier que $\alpha \neq 0$.

Les premières opérations élémentaires sur les lignes de chaque matrice sont choisies pour obtenir une matrice triangulaire (en général triangulaire supérieure), appelée réduite de Gauss, qui détermine l'inversibilité.

Proposition.

Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(K)$ est inversible si et seulement si ses réduites de Gauss ont tous les termes diagonaux non nuls.

Remarque. Dans le cas d'une matrice A triangulaire, elle est sa propre réduite de Gauss. On peut donc savoir si elle est inversible ou non en regardant les termes sur sa diagonale, sans aucun calcul.

Exemple 11. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A = I_3 A \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

On commence par chercher une réduite de Gauss :

$$A = I_3 A \Longleftrightarrow \begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

$$\Longleftrightarrow L_3 \longleftarrow L_3 - L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} A$$

La réduite de Gauss de A est une matrice triangulaire supérieure dont tous les termes diagonaux sont non nuls. A est donc une matrice inversible. On cherche maintenant A^{-1}.

$$A = I_3 A \Longleftrightarrow \begin{array}{l} L_1 \longleftarrow 3L_3 - 8L_1 \\ L_2 \longleftarrow L_3 + 2L_2 \end{array} \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} A$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{l} L_1 \longleftarrow \frac{-1}{8} L_1 \\ L_2 \longleftarrow \frac{1}{2} L_2 \\ L_3 \longleftarrow \frac{1}{8} L_3 \end{array} \quad I_3 = \begin{pmatrix} -1/8 & 3/8 & -3/8 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 3/8 & -1/8 & 1/8 \end{pmatrix} A$$

On peut alors conclure que :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Exemple 12. On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

$$B = I_3 B \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B$$

On commence par calculer une réduite de Gauss de B :

$$B = I_3 B \Longleftrightarrow \begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} B$$

$$\Longleftrightarrow L_3 \longleftarrow L_3 - L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} B$$

La réduite de Gauss de B est une matrice triangulaire supérieure dont un terme de la diagonale est nul. B n'est donc pas une matrice inversible.

Exemple 13. On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$$C = I_3 C \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C$$

On commence par calculer la réduite de Gauss de C :

$$C = I_3 C \Longleftrightarrow L_1 \longleftrightarrow L_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C$$

$$\Longleftrightarrow L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} C$$

$$\Longleftrightarrow L_2 \longleftarrow \frac{1}{4} L_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} C$$

$$\Longleftrightarrow L_3 \longleftarrow L_3 + 6L_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 9/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 3/2 & -3 & 1 \end{pmatrix} C$$

La réduite de Gauss de C n'a aucun zéro sur la diagonale, donc C est inversible. On cherche maintenant C^{-1}.

$$C = I_3 C \Longleftrightarrow \begin{array}{l} L_1 \longleftarrow L_1 - \frac{2}{9} L_3 \\ L_2 \longleftarrow L_2 - \frac{1}{6} L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 5/3 & -2/9 \\ 0 & 1/2 & -1/6 \\ 3/2 & -3 & 1 \end{pmatrix} C$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{l} L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \longleftarrow \frac{2}{9} L_3 \end{array} I_3 = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 1/9 \\ 0 & 1/2 & -1/6 \\ 1/3 & -2/3 & 2/9 \end{pmatrix} C$$

On en déduit que :

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}.$$