Nombres complexes

Cours de É. Bouchet – ECS1

10 décembre 2018

Table des matières

1 Notation algébrique d'un nombre complexe

1.1 Définition

Définition (Nombre complexe)**.**

On appelle **nombre complexe** tout élément z pouvant s'écrire sous la forme

$$z = a + ib,$$

avec (a, b) un couple de réels et i une solution de l'équation $i^2 = -1$.
L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Définition (Partie réelle, partie imaginaire)**.**

L'écriture du nombre complexe z sous la forme $z = a + ib$ avec a et b des réels est appelée **l'écriture algébrique** de z. Le réel a est appelé la **partie réelle** de z et b est sa **partie imaginaire**.
On note $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.

Proposition.

L'écriture algébrique d'un nombre complexe z est unique.

Démonstration. On suppose que $z = a + ib = \alpha + i\beta$ avec $(a, b, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4$. Alors $(a - \alpha) = -i(b - \beta)$, et donc

- Si $b = \beta$, alors $a = \alpha$ et les deux écritures sont identiques.
- Si $b \neq \beta$, alors

$$i = -\frac{a - \alpha}{b - \beta} \in \mathbb{R},$$

  ce qui est impossible.

D'où l'unicité.
Variante : en mettant au carré l'égalité $(a - \alpha) = -i(b - \beta)$, on trouve $(a - \alpha)^2 = -(b - \beta)^2$ et les deux carrés sont donc nuls. Donc $a = \alpha$ et $b = \beta$. □

Remarque. On peut donc montrer que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont une base est $(1, i)$.

Définition (Nombre imaginaire pur)**.**

Le complexe z est dit **imaginaire pur** si $\mathrm{Re}(z) = 0$. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres imaginaires purs.

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est muni de deux opérations internes, l'addition et la multiplication dont les règles de calculs sont identiques à celles de $\mathbb{R}$, en tenant compte de l'égalité $i^2 = -1$. Les formules usuelles sur les sommes (somme de termes d'une suite géométrique, télescopage, binôme de Newton) restent valides dans $\mathbb{C}$.
Une formule utile : si $z = a + ib$ avec (a, b) un couple de réels différent de $(0, 0)$, alors $z \neq 0$ et on a :

$$\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

1.2 Conjugué

Définition (Conjugué)**.**

Soit (a, b) un couple de réels. Le **conjugué** du nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre complexe

$$\overline{z} = a - ib.$$

Proposition.

Pour tout complexe z,

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}).$$

Démonstration. On pose $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors $z + \overline{z} = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2ib = 2i\,\mathrm{Im}(z)$. □

Remarque. Cela donne en particulier :

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z},$$
$$z \in i\mathbb{R} \iff \overline{z} = -z.$$

Proposition (Opérations sur le conjugué)**.**

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes quelconques. On a :

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},$$

$$\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2},$$

et si z_2 est non nul,

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

Démonstration. On pose $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$, avec $(a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{R}^4$. Alors :

$$\overline{z_1 + z_2} = a_1 + a_2 - i(b_1 + b_2) = a_1 - ib_1 + a_2 - ib_2 = \overline{z_1} + \overline{z_2},$$

$$\overline{z_1 . z_2} = \overline{a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)} = a_1a_2 - b_1b_2 - ia_1b_2 - ia_2b_1 = (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = \overline{z_1} . \overline{z_2}.$$

On obtient la dernière égalité par produit avec :

$$\overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \frac{a_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{b_2}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{1}{\overline{z_2}}.$$

□

2 Notation exponentielle d'un nombre complexe

2.1 Module

Définition (Module)**.**

Soit $z = a + ib$ où (a, b) est un couple de réels. Le **module** de z, noté $|z|$, est le réel

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Proposition.

Pour tout nombre complexe z,

$$|z| = |\overline{z}|, \qquad |z| \geqslant 0 \quad \text{et} \quad |z| = 0 \iff z = 0.$$

Proposition (Relations entre $|\mathrm{Re}(z)|$, $|\mathrm{Im}(z)|$ et $|z|$)**.**

Pour tout nombre complexe z,

$$|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z| \quad \text{et} \quad \mathrm{Re}(z) = |z| \iff z \in \mathbb{R}_+,$$

$$|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z| \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) = |z| \iff z \in i\mathbb{R}_+.$$

Démonstration. (démonstration à connaître) On montre la première relation, la deuxième s'obtient de la même manière. Soit $z \in \mathbb{C}$, par stricte croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$|\mathrm{Re}(z)| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2} \leqslant \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = |z|,$$

de plus,

$$\mathrm{Re}(z) = |z| \iff (\mathrm{Re}(z) \geqslant 0 \text{ et } \mathrm{Re}(z)^2 = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2) \iff (\mathrm{Re}(z) \geqslant 0 \text{ et } \mathrm{Im}(z) = 0) \iff z \in \mathbb{R}_+.$$

□

Proposition (Module du produit)**.**

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes quelconques. Alors

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|.$$

Démonstration. Comme $z_1\overline{z_1} = |z_1|^2 \geqslant 0$, on peut écrire :

$$|z_1 z_2| = \sqrt{z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2}} = \sqrt{z_1\overline{z_1}}\sqrt{z_2\overline{z_2}} = |z_1|\,|z_2|.$$

□

Proposition (Inégalité triangulaire)**.**

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes quelconques. Alors

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

et

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}_+.$$

Démonstration. (démonstration à connaître) On procède d'abord comme dans le cas réel :

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 - (|z_1| + |z_2|)^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} - |z_1|^2 - |z_2|^2 - 2\,|z_1|\,|z_2| \\
&= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) - |z_1|^2 - |z_2|^2 - 2\,|z_1|\,|\overline{z_2}| \\
&= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + |z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2 - 2\,|z_1\overline{z_2}| \\
&= 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) - 2\,|z_1\overline{z_2}| \leqslant 0.
\end{aligned}$$

D'où $|z_1 + z_2|^2 \leqslant (|z_1| + |z_2|)^2$, et en passant à la racine (croissante sur $\mathbb{R}_+$), comme les modules sont tous positifs, $|z_1 + z_2| \leqslant (|z_1| + |z_2|)$. De plus, on a égalité ssi

$$\mathrm{Re}(z_1 z_2) = |z_1\overline{z_2}| \iff z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}_+.$$

□

2.2 Argument

Définition (Argument)**.**

Soit z un nombre complexe non nul. Tout réel θ tel que

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

est appelé un **argument** de z.

Remarque. Si θ est un argument de z, alors tout réel de la forme $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est encore un argument de z.

Remarque. Supposons $z = a + ib = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, et $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Alors :

$$a = \rho(\cos\theta) \text{ et } b = \rho(\sin\theta),$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exemple 1. Trouver le module et un argument de $z = 1 + i$.
$|z| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$. Donc $z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Or $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc $\theta = \frac{\pi}{4}$ est un argument de z.

2.3 Notation exponentielle

Dans la suite, on notera $e^{i\theta}$ le complexe $\cos\theta + i\sin\theta$.

Définition (Forme exponentielle).

Tout nombre complexe z non nul s'écrit sous la **forme exponentielle**

$$z = re^{i\theta},$$

avec $r > 0$ et θ réel. On a alors $r = |z|$ et θ est un argument de z.

Proposition.

Pour tout $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$,

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \overline{e^{i\theta}}, \qquad \left|e^{i\theta}\right| = 1, \qquad e^{i\theta}e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)} \quad \text{et} \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}} = e^{i(\theta-\varphi)}.$$

Proposition (Formule de Moivre).

Pour tout θ réel, et tout entier n,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Démonstration. Il suffit de passer sous forme exponentielle :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

□

Exemple 2. Exprimer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
On a :

$$\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = (\cos\theta)^3 + 3i(\cos\theta)^2\sin\theta - 3\cos\theta(\sin\theta)^2 - i(\sin\theta)^3.$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on trouve :

$$\cos(3\theta) = (\cos\theta)^3 - 3\cos\theta(\sin\theta)^2,$$

$$\sin(3\theta) = 3(\cos\theta)^2\sin\theta - (\sin\theta)^3.$$

Proposition (Formules d'Euler).

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \text{ et } \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer les formules $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ au nombre complexe $z = \cos(\theta)+i\sin(\theta)$. □

Exemple 3. Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. Écrire le complexe $1 + e^{i\theta}$ sous forme exponentielle.
On a

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}},$$

qui convient car si $\theta \in]-\pi, \pi[$, $2\cos\frac{\theta}{2} > 0$.

Exemple 4. Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. Exprimer $\cos(\theta)^3$ comme combinaison linéaire de $\cos(3\theta)$ et $\cos(\theta)$ (cette opération de transformation d'un produit en combinaison linéaire s'appelle linéarisation).
On applique successivement les formules d'Euler, le binôme de Newton, et de nouveau les formules d'Euler :

$$\begin{aligned}
\cos(\theta)^3 &= \frac{1}{8}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3 \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}}{2} + 3\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) \\
&= \frac{\cos(3\theta) + 3\cos(\theta)}{4}.
\end{aligned}$$

Exemple 5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k)$.

On remarque que $S = \mathrm{Re}(T)$ avec $T = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ik}$. On commence donc par calculer T. Par la formule du binôme de Newton puis en appliquant la formule de l'exemple 3, on trouve :

$$T = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^i)^k = (e^i + 1)^n = \left(2\cos\left(\frac{1}{2}\right) e^{\frac{i}{2}}\right)^n = 2^n \cos\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{\frac{in}{2}}.$$

D'où par passage à la partie réelle, $S = 2^n \cos\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{n}{2}\right)$.

2.4 Exemple d'utilisation : les racines n-ièmes de l'unité

Soit n est un entier naturel non nul. On cherche à résoudre l'équation $z^n = 1$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
Comme le but est de calculer z^n, la forme exponentielle semble la plus adaptée : on pose $z = |z|\, e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z^n = 1 \iff |z|^n\, e^{in\theta} = 1 \iff |z|^n = 1 \text{ et } e^{in\theta} = 1 \text{ (en prenant le module)}.$$

Comme $|z| \in \mathbb{R}_+$,

$$|z|^n = 1 \iff |z| = 1.$$

Par ailleurs,

$$e^{in\theta} = 1 \iff \cos(n\theta) = 1 \text{ et } \sin(n\theta) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta = \frac{2k\pi}{n}.$$

L'ensemble des solutions de $z^n = 1$ dans $\mathbb{C}$ est donc :

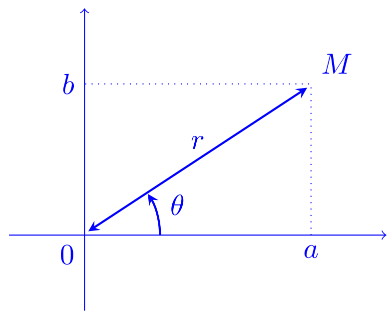
$$\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} | k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Comme $e^{2i\pi} = 1$, on pourrait également montrer (mais c'est plus long) que cet ensemble se restreint à :

$$\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} | k \in [\![0, n-1]\!]\right\}.$$

3 Interprétation géométrique

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$, le nombre complexe $z = a + ib$ avec (a, b) réels est **l'affixe** du point M du plan de coordonnées (a, b) relativement au repère $(O;\vec{u},\vec{v})$. C'est aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
Sous forme exponentielle $z = re^{i\theta}$, r correspond à la distance du point M à l'origine, et θ à une valeur de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ en radians.



4 Principales formules trigonométrique

Proposition (Formules d'addition)**.**

Pour tous réels a et b, on a :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

Démonstration. (démonstration à connaître) On passe par les nombres complexes :

$$\begin{aligned}\cos(a + b) + i \sin(a + b) &= e^{i(a+b)} \\ &= e^{ia}e^{ib} \\ &= (\cos(a) + i \sin(a))(\cos(b) + i \sin(b)) \\ &= (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + i(\sin a \cos b + \cos a \sin b).\end{aligned}$$

Il suffit ensuite d'identifier les parties réelles et imaginaires de ces deux égalités pour obtenir les expressions de $\cos(a+b)$ et $\sin(a + b)$. Les deux autres s'obtiennent de même en remplaçant b par $-b$ dans les calculs. □

Proposition (Formules de duplication)**.**

Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\cos(2a) = (\cos a)^2 - (\sin a)^2 = 2(\cos a)^2 - 1 = 1 - 2(\sin a)^2,$$

$$\sin(2a) = 2(\sin a)(\cos a).$$

Démonstration. Cela découle directement des formules d'addition pour $a = b$, et de la formule $(\cos a)^2 + (\sin a)^2 = 1$. □

Proposition (Formules de linéarisation du carré)**.**

Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$(\cos a)^2 = \frac{1+\cos(2a)}{2},$$

$$(\sin a)^2 = \frac{1-\cos(2a)}{2}.$$

Démonstration. Cela découle directement des formules $\cos(2a) = 2(\cos a)^2 - 1$ et $\cos(2a) = 1 - 2(\sin a)^2$. Mais on pouvait également le montrer en utilisant les formules d'Euler :

$$(\cos a)^2 = \left(\frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2ia}+e^{-2ia}+2}{4} = \frac{\cos(2a)+1}{2},$$

et de même pour la formule de $(\sin a)^2$. □

Remarque. Attention : pour linéariser une expression autre qu'un carré, il faut impérativement utiliser les formules d'Euler.