Probabilités sur un espace fini

Cours de É. Bouchet – ECS1

3 décembre 2020

Table des matières

1 Expérience aléatoire

1.1 Étude de situation

Définition (Expérience aléatoire, univers)**.**

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat n'est pas connu à l'avance. L'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience est noté Ω et est appelé **l'univers** de l'expérience.

Définition (Événement)**.**

Soit Ω un univers fini. On appelle **événement** tout élément de $\mathcal{P}(\Omega)$ et **événement élémentaire** tout événement de cardinal 1.

Remarque. Dans le cas d'un univers fini, un événement est donc un sous-ensemble de Ω.

Expérience 1 On lance un dé cubique dont les faces sont des numéros de 1 à 6.

— $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = [\![1, 6]\!]$.
— $A =$ "obtenir un 6" donne la partie de Ω : $\{6\}$.
— $B =$ "obtenir un nombre pair" donne la partie de Ω : $\{2, 4, 6\}$.

Expérience 2 On lance deux dés cubiques, un rouge et un noir.

— $\Omega = \{(i, j) | i, j \in [\![1, 6]\!]\} = [\![1, 6]\!]^2$.
— $A =$ "obtenir un double 6" donne la partie de Ω : $\{(6, 6)\}$.
— $B =$ "obtenir un double" donne la partie de Ω : $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$.
— $C =$ "obtenir au moins un 6" donne la partie de Ω : $([\![1, 6]\!] \times \{6\}) \cup (\{6\} \times [\![1, 6]\!]) = \Omega \setminus ([\![1, 5]\!]^2)$.

Expérience 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance une pièce n fois, avec la convention que "1" représente "pile" et "0" "face".

— $\Omega = \{(i_1, i_2, \dots, i_n) | \forall j, i_j \in \{0, 1\}\} = \{0, 1\}^n$.
— $A =$ "n'obtenir que des piles" donne la partie de Ω : $\{1\}^n$.
— $B =$ "obtenir un pile au second lancer" donne la partie de Ω : $\{0, 1\} \times \{1\} \times \{0, 1\}^{n-2}$.
— $C =$ "obtenir au moins un pile" donne la partie de Ω : $\cup_{j=1}^{n} (\{0, 1\}^{j-1} \times \{1\} \times \{0, 1\}^{n-j}) = \Omega \setminus \{0\}^n$.

Expérience 4 Soit $(n, N) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On effectue n tirages successifs avec remise d'une boule, dans une urne de N boules numérotées de 1 à N.

— $\Omega = [\![1, N]\!]^n =$ l'ensemble des n-listes de $[\![1, N]\!]$..
— Un exemple d'élément de Ω est $(1, 1, \dots, 1)$.
— $A =$ "ne jamais obtenir la boule N" donne la partie de Ω : $[\![1, N-1]\!]^n$.
— $B =$ "toujours tirer le même numéro" donne la partie de Ω : $\cup_{i=1}^{N} \{i\}^n$.

Expérience 5 Soit $(n, N) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On effectue n tirages successifs sans remise d'une boule, dans une urne de N boules numérotées de 1 à N (dans ce cas, $n \leqslant N$).

— $\Omega =$ l'ensemble des n-listes d'éléments distincts de $[\![1, N]\!]$.
— Un exemple d'élément de Ω est $(1, 2, 3, \dots, n)$.

Expérience 6 Soit $(n, N) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On effectue un tirage de n boules prises simultanément dans une urne de N boules numérotées de 1 à N (dans ce cas, $n \leqslant N$).

— $\Omega =$ l'ensemble des parties à n éléments de $[\![1, N]\!]$.
— Un exemple d'élément de Ω est $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Définition (Événement impossible, certain)**.**

Soit Ω un univers fini. Un événement qui n'est jamais réalisé s'appelle un **événement impossible**, on le note $\emptyset$. Un événement qui est toujours réalisé est un **événement certain**, on le note Ω.

1.2 Événements

Vocabulaire des événements	**Vocabulaire des ensembles**	**Notation**
événement élémentaire	singleton	$\{\omega\}$
événement contraire	complémentaire	$\overline{A} = \Omega \setminus A$
événement impossible	ensemble vide	$\emptyset$
les événements A et B sont réalisés	on est dans l'intersection de A et B	$A \cap B$
les événements A ou B sont réalisés	on est dans la réunion de A et B	$A \cup B$
les événements A et B sont incompatibles	les ensembles A et B sont disjoints	$A \cap B = \emptyset$
l'événement A implique l'événement B	l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B	$A \subset B$

Exemple 1. Si $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille d'événements dans un univers fini :

1. $\displaystyle\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} A_i$ correspond à l'événement : au moins un des événements A_i est réalisé (A_1 ou A_2 ou ...ou A_n).
2. $\displaystyle\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} A_i$ correspond à l'événement : les événements A_i sont tous réalisés (A_1 et A_2 et ...et A_n).
3. $\displaystyle\overline{\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} A_i} = \bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} \overline{A_i}$ correspond à l'événement : aucun des événements A_i n'est réalisé.
4. $\displaystyle\overline{\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} A_i} = \bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} \overline{A_i}$ correspond à l'événement : au moins un des événements A_i n'est pas réalisé.
5. $\displaystyle\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} (B \cap A_i) = B \bigcap \left(\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} A_i \right)$ correspond à l'événement : l'événement B est réalisé, ainsi qu'au moins un des événements A_i.
6. $\displaystyle\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} (B \cup A_i) = B \bigcup \left(\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} A_i \right)$ correspond à l'événement : l'événement B est réalisé ou tous les événements A_i sont réalisés.

1.3 Système complet d'événements

Définition (Système complet d'événements)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Ω un univers fini et $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{P}(\Omega)^n$. On dit que $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un **système complet d'événements** de Ω lorsque :

- les événements A_i sont deux à deux incompatibles : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.
- les événements A_i recouvrent l'espace : $\displaystyle\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} A_i = \Omega$.

Remarque. De manière évidente,

- $(\{\omega\})_{\omega\in\Omega}$ est un système complet d'événements de Ω.
- Si $A \subset \Omega$ alors $\left(A, \overline{A}\right)$ est un système complet d'événements de Ω.

Exemple 2. Déterminer plusieurs systèmes complets d'événements pour l'univers Ω de l'expérience 1.

$\{1,3,5\}, \{2,4,6\}$ est un système complet d'événements de Ω.

$\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}$ est un système complet d'événements de Ω.

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ est un système complet d'événements de Ω.

$\{1\}, \{2,3,4\}, \{5,6\}$ est un système complet d'événements de Ω.

Proposition (Décomposition d'un événement sur un système complet d'événements)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Ω un univers fini et $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ un système complet d'événements de Ω. Tout événement $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ peut se décomposer comme $B = \displaystyle\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} (B \cap A_i)$, où les événements $B \cap A_i$ sont incompatibles deux à deux.

Démonstration. On a par la définition d'un système complet d'événements et par distributivité :

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} A_i \right) = \bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} (B \cap A_i)\,.$$

De plus, soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Si $i \neq j$, $(B \cap A_i) \cap (B \cap A_i) = B \cap (A_i \cap A_j) = B \cap \emptyset = \emptyset$ par incompatibilité des A_i. D'où le résultat. $\square$

2 Espaces probabilisés : cas fini

Dans toute la suite du chapitre, Ω désigne un univers fini, et on note $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

2.1 Définition

Définition (Probabilité)**.**

Une **probabilité** est une application P définie sur $\mathcal{A}$ et à valeur dans $[0,1]$, vérifiant $P(\Omega) = 1$ et telle que si A et B sont deux événements incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Remarque. Une conséquence directe de la définition est que pour toute famille d'événements $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ deux à deux incompatibles,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Définition (Espace probabilisé)**.**

Si P est une probabilité, on dit que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un **espace probabilisé**.

2.2 Le cas équiprobable

Définition (Équiprobabilité)**.**

Soit Ω un univers fini. Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'on est en situation d'**équiprobabilité**.

Exemple 3. On lance un dé équilibré. La probabilité d'obtenir le numéro $i \in [\![1,6]\!]$ est alors $\dfrac{1}{\text{Card}\left([\![1,6]\!]\right)} = \dfrac{1}{6}$.

Exemple 4. Une urne contient $n \in \mathbb{N}^*$ boules identiques numérotées de 1 à n. On en tire une au hasard : la probabilité que ce soit la boule numéro $i \in [\![1,n]\!]$ est alors $\dfrac{1}{\text{Card}\left([\![1,n]\!]\right)} = \dfrac{1}{n}$.

Proposition.

Soit Ω un univers fini, et $A \in \mathcal{A}$. Si on a équiprobabilité, alors

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

Exemple 5. On lance deux dés équilibrés de couleurs différentes (un noir et un rouge), quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 6 ?
On note A l'événement "obtenir une somme égale à 6". Ici, $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ et est de cardinal 36. Pour réaliser A, il faut un des tirages suivants (l'ordre est : rouge, puis noir) : $(1,5)$, $(5,1)$, $(3,3)$, $(2,4)$ et $(4,2)$. Donc $P(A) = \dfrac{5}{36}$.

2.3 Propriétés

Proposition (Lien avec les opérations sur les événements)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A,B) \in \mathcal{A}^2$. Alors :

1. $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$,
2. $P(\emptyset) = 0$,
3. Si $A \subset B$, alors $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$,
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Démonstration. (démonstration à connaître)

1. Comme A et $\overline{A}$ sont incompatibles, l'additivité donne $P(A) + P(\overline{A}) = P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1$.
2. Par le point précédent, $P(\emptyset) = P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$.
3. Comme $A \subset B$, $P(B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A)$, où on peut utiliser l'additivité car $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. D'où le résultat.
4. $P(A \cup B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A)$, par additivité, car $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus (A \cap B)) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ par le point précédent, car $A \cap B \subset B$.

□

Proposition (Formule de Poincaré)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_1, A_2, A_3) \in \mathcal{A}^3$. Alors

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Démonstration. Les formules d'additivité et de distributivité donnent :

$$\begin{aligned}
&P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\
&= P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cup A_2) \cap A_3) \\
&= (P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)) + P(A_3) - P((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) \\
&= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - (P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P((A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3))) \\
&= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).
\end{aligned}$$

□

Exemple 6. Une classe contient 30 élèves, qui étudient tous une ou plusieurs langues. On sait que 25 élèves étudient l'anglais, 12 l'allemand et 8 l'espagnol. Par ailleurs, 8 élèves étudient à la fois l'allemand et l'anglais, 6 à la fois l'espagnol et l'anglais et 2 à la fois l'allemand et l'espagnol.
On choisit un élève aléatoirement. Quelle est la probabilité qu'il étudie les trois langues ?
On note A l'événement "l'élève étudie l'anglais", B l'événement "l'élève étudie l'allemand" et E l'événement "l'élève étudie l'espagnol". Les hypothèses donnent alors :

$$P(A) = \frac{25}{30}, \quad P(B) = \frac{12}{30}, \quad P(E) = \frac{8}{30}, \quad P(A \cap B) = \frac{8}{30}, \quad P(A \cap E) = \frac{6}{30} \quad \text{et} \quad P(E \cap B) = \frac{2}{30}.$$

La formule de Poincarré donne alors :

$$P(A \cap B \cap E) = P(A \cup B \cup E) - P(A) - P(B) - P(E) + P(A \cap B) + P(A \cap E) + P(B \cap E).$$

D'où

$$P(A \cap B \cap E) = \frac{30 - 25 - 12 - 8 + 8 + 6 + 2}{30} = \frac{1}{30}.$$

Proposition (Croissance de P)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. P est une application croissante (au sens de l'inclusion) :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2, \quad A \subset B \Longrightarrow P(A) \leqslant P(B).$$

Démonstration. Soit $(A, B) \in \mathcal{A}^2$, on suppose que $A \subset B$. On a alors $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$. Comme de plus P est positive, on trouve $P(B) = P(B \setminus A) + P(A) \geqslant P(A)$, ce qu'il fallait démontrer. □

Exemple 7. On effectue une succession de pile ou face. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose A_n l'événement "il y a au moins trois pile dans les n premiers lancers" et $u_n = P(A_n)$. Montrer que la suite u est convergente.
On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$. En effet, s'il y a au moins trois pile dans les n premiers lancers, il y en aura aussi au moins trois dans les $n+1$ premiers lancers. Donc par croissance de la probabilité, $u_n = P(A_n) \leqslant P(A_{n+1}) = u_{n+1}$. Ce qui signifie que la suite u est croissante.
Or u est également majorée par 1 (c'est une suite de probabilités). Elle est donc croissante et majorée : c'est une suite convergente.

Proposition (Lien entre probabilité et système complet d'événements)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $n \in \mathbb{N}^*$. Si $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements de Ω, alors

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Démonstration. Comme les A_i recouvrent l'univers et sont deux à deux incompatibles, l'additivité de P donne :

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

□

3 Probabilités conditionnelles

Définition (Probabilité conditionnelle)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit $B \in \mathcal{A}$ tel que $P(B) \neq 0$. On définit un nouvel espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P_B)$ par

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

P_B est appelée **probabilité conditionnelle** relative à B, et $P_B(A)$ est la probabilité de A sachant B.

Remarque. On utilise parfois la notation $P(A|B)$ à la place de $P_B(A)$.

3.1 Formule des probabilités composées

Théorème (Formule des probabilités composées)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille d'événements de $\mathcal{A}$ telle que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2)\, P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Démonstration. (démonstration à connaître) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $H(n)$:
« $\forall (A_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{A}^n$ tel que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$, $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1\cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n)$ ».

- $\forall A_1 \in \mathcal{A}$, $P(A_1) = P(A_1)$, donc $H(1)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $H(n)$ est vraie.
  Soit $(A_i)_{i\in[\![1,n+1]\!]} \in \mathcal{A}^{n+1}$ tel que $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \neq 0$. On applique $H(n)$ à $(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, (A_n \cap A_{n+1}))$ (c'est possible car par croissance de P, $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \geqslant P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$. Cette probabilité est donc bien non nulle) :
  $$P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap (A_n \cap A_{n+1})) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1\cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n \cap A_{n+1}).$$
  Or par définition de la probabilité conditionnelle, comme $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \neq 0$,
  $$P_{A_1\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n \cap A_{n+1}) = P_{A_1\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n) P_{(A_1\cap\dots\cap A_{n-1})\cap A_n}(A_{n+1}).$$
  En remplaçant cette formule dans l'expression précédente, on trouve que $H(n+1)$ est vraie.

D'où le résultat.
Rmq : pour l'hérédité, on aurait également pu appliquer $H(n)$ à $((A_1 \cap A_2), A_3 \dots, A_n, A_{n+1})$. □

Exemple 8. On tire trois fois de suite, sans remise, dans une urne composée de 7 boules blanches et 6 rouges. Pour $i \in [\![1,3]\!]$, on pose B_i ="le i-ème tirage donne une boule blanche" et R_i ="le i-ème tirage donne une boule rouge". Calculer $P(B_1 \cap B_2 \cap R_3)$.
Comme $P(B_1 \cap B_2) \neq 0$ (il y a plus de deux boules blanches, il est donc possible de commencer par en tirer deux), la formule des probabilités composées donne :
$$P(B_1 \cap B_2 \cap R_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1\cap B_2}(R_3) = \frac{7}{13} \times \frac{6}{12} \times \frac{6}{11} = \frac{21}{143}.$$

3.2 Formule des probabilités totales

Théorème (Formule des probabilités totales)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit $I \subset \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de Ω. Alors pour tout $B \in \mathcal{A}$,
$$P(B) = \sum_{i\in I} P(B \cap A_i).$$

Démonstration. On décompose l'événement B sur le système complet d'événements $(A_i)_{i\in I}$:
$$B = \bigcup_{i\in I} (B \cap A_i),$$
et les $(B \cap A_i)$ sont incompatibles deux à deux. L'additivité de la probabilité donne alors le résultat. □

Théorème (Formule des probabilités totales, deuxième version)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit $I \subset \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de Ω tel que pour tout $i \in I$, $P(A_i) \neq 0$. Alors pour tout $B \in \mathcal{A}$,
$$P(B) = \sum_{i\in I} P(A_i) P_{A_i}(B).$$

Démonstration. On applique la première version de la formule des probabilités totales :

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i).$$

Par définition de la probabilité conditionnelle, pour tout $i \in I$, comme $P(A_i) \neq 0$, $P(B \cap A_i) = P(A_i) P_{A_i}(B)$. En remplaçant cette expression dans la formule précédente, on obtient le résultat souhaité. □

Exemple 9. On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3. On choisit une urne au hasard, et on pioche une boule dedans. On suppose que $\forall i \in [\![1, 3]\!]$, l'urne U_i contient i boules blanches et 3 boules noires. Quelle est la probabilité que la boule piochée soit noire ?
On note A l'événement "piocher une boule noire" et $\forall i \in [\![1, 3]\!]$, B_i l'événement "piocher dans l'urne U_i". (B_1, B_2, B_3) forme un système complet d'événements et ces trois événements sont de probabilité non nulle, on peut donc appliquer la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60}.$$

Corollaire.

En particulier pour tout $(A, B) \in \mathcal{A}^2$:

$$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right),$$

et si de plus $P(A) \in]0; 1[$,

$$P(B) = P(A) P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) P_{\overline{A}}(B).$$

3.3 Formule de Bayes

Théorème (Formule de Bayes)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) \in]0, 1[$. Pour tout $B \in \mathcal{A}$ tel que $P(B) \neq 0$,

$$P_B(A) = \frac{P(A) P_A(B)}{P(B)} = \frac{P(A) P_A(B)}{P(A) P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) P_{\overline{A}}(B)}.$$

Démonstration. (démonstration à connaître) La première égalité découle de la définition du conditionnement : comme $P(B) \neq 0$ et $P(A) \neq 0$,

$$P_B(A) P(B) = P(A \cap B) = P(A) P_A(B).$$

Il suffit ensuite de diviser par $P(B) \neq 0$ pour obtenir l'égalité annoncée.
Pour obtenir la deuxième égalité, on applique la formule des probabilités totales, deuxième version, au système complet d'événements $(A, \overline{A})$ (qui vérifie bien $P(A) \neq 0$ et $P(\overline{A}) = 1 - P(A) \neq 0$) :

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B).$$

Il suffit alors de remplacer $P(B)$ par cette nouvelle expression au dénominateur de la première égalité pour obtenir la deuxième égalité. □

Exemple 10. Un laboratoire propose un test de dépistage d'une maladie, qui touche une personne sur 100 000 :

— lorsque le test est appliqué à une personne malade, le test est positif dans 99,8% des cas.
— lorsqu'il est appliqué à une personne saine, il est négatif dans 99,6% des cas.

Sachant que le test est positif, quelle est la probabilité que la personne soit réellement malade ?
On note M l'événement "la personne est malade" et T l'événement "le test est positif". L'énoncé nous donne :

$$P_M(T) = 0,998 \quad P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,996 \quad P(M) = \frac{1}{100000},$$

et on cherche à calculer $P_T(M)$. On commence par calculer $P(T)$, pour vérifier qu'il est non nul. Pour cela, on applique la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(M, \overline{M})$ qui vérifie bien $P(M) \in]0,1[$:

$$P(T) = P(M)P_M(T) + P(\overline{M})P_{\overline{M}}(T) = 0,00001 \times 0,998 + 0,99999 \times (1 - 0,996) = 0,00400994 \neq 0.$$

On obtient alors par la formule de Bayes (comme $P(T) \neq 0$ et $P(M) \neq 0$) :

$$P_T(M) = \frac{P(M)P_M(T)}{P(T)} = \frac{0,00001 \times 0,998}{0,00400994} = \frac{0,00000998}{0,00400994} = 0,0025.$$

Donc même si le test est positif, il y a très peu de chances que la personne soit malade $(0,25\%)$.
Ce résultat contre-intuitif est dû au nombre très faible de personnes malades dans la population.

4 Indépendance

4.1 Définition

Définition (Indépendance)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit $(A, B) \in \mathcal{A}^2$. On dit que A et B sont **indépendants** lorsque

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B).$$

Remarque. ATTENTION, ne pas confondre INDÉPENDANCE et INCOMPATIBILITÉ :
— **L'indépendance ne peut se juger qu'en rapport à la probabilité**. A et B sont indépendants pour P lorsque

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B).$$

— **L'incompatibilité est une notion ensembliste, qui ne dépend pas de la probabilité**. A et B sont incompatibles lorsque

$$A \cap B = \emptyset,$$

et on a alors (mais c'est une conséquence) : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemple 11. On dispose de deux pièces, une équilibrée et une truquée. On lance un dé équilibré à 6 faces :
— si on obtient le chiffre 1, on lance deux fois la pièce équilibrée ;
— si on obtient un chiffre différent de 1, on lance deux fois la pièce truquée (pile avec probabilité $\frac{1}{3}$).

On note A ="obtenir pile au premier lancer de la pièce", B ="obtenir pile au second lancer de la pièce" et C ="le lancer du dé donne le chiffre 1". Étudier l'indépendance de A et B pour P et P_C.
Si C est réalisé, on sait que c'est la pièce équilibrée qui est utilisée. On a donc :

$$P_C(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P_C(A)P_C(B),$$

donc il y a indépendance de A et B sous P_C.
Par ailleurs, en appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(C, \overline{C})$ qui vérifie bien $P(C) \in]0,1[$, on obtient :

$$P(A \cap B) = P(C)P_C(A \cap B) + P(\overline{C})P_{\overline{C}}(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{9} = \frac{29}{216}$$

et

$$P(B) = P(A) = P(C)P_C(A) + P(\overline{C})P_{\overline{C}}(A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{13}{6^2}.$$

Donc $P(A)P(B) = \frac{13^2}{6^4} \neq \frac{29}{216}$. Donc A et B ne sont pas indépendants sous P.

Proposition (Indépendance et probabilité conditionnelle)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ tels que $P(A) \neq 0$. Les événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(B) = P_A(B).$$

Démonstration. Cela découle directement des équivalences suivantes, dues à la définition de probabilité conditionnelle :

$$P(B) = P_A(B) \Longleftrightarrow P(B)P(A) = P_A(B)P(A) \Longleftrightarrow P(B)P(A) = P(A \cap B).$$

□

Proposition (Complémentaire et indépendance)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit $(A, B) \in \mathcal{A}^2$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A et B sont indépendants.
2. A et $\overline{B}$ sont indépendants.
3. $\overline{A}$ et B sont indépendants.
4. $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration. On va montrer que (A et B indépendants) implique (A et $\overline{B}$ indépendant), toutes les équivalences en découlent ensuite directement. Supposons donc que A et B sont indépendants. Alors

$$P(A)P(\overline{B}) = P(A)(1 - P(B)) = P(A) - P(A)P(B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A \cap \overline{B}),$$

où la dernière égalité se montre en appliquant la formule des probabilités totales à A et au système complet d'événements $(B, \overline{B})$ ou en remarquant que $A \cap B \subset A$ et $P(A \cap \overline{B}) = P(A \setminus (A \cap B))$.
Donc A et $\overline{B}$ sont indépendants. D'où le résultat. □

4.2 Indépendance d'une famille

Définition (Indépendance d'une famille)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une **famille d'événements mutuellement indépendants** si pour tout $J \subset [\![1,n]\!]$,

$$P\left(\bigcap_{k \in J} A_k\right) = \prod_{k \in J} P(A_k).$$

Remarque. ATTENTION : vérifier $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k)$ n'est pas suffisant. Pas plus qu'il ne suffit de vérifier que les événements sont indépendants deux à deux.

Exemple 12. On effectue un lancer de pile ou face. Déterminer une famille d'événements (A, B, C) qui vérifient $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, mais qui ne forment pas une famille d'événements mutuellement indépendants.
Il suffit de choisir un événement impossible pour A, et $B = C$. On pose par exemple $A =$"ne tirer ni pile ni face", $B = C =$"tirer pile", et on a :

$$P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0 = 0 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(A)P(B)P(C).$$

Il n'y a pourtant pas indépendance mutuelle car B et C ne sont pas indépendants :

$$P(B \cap C) = P(B) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} = P(B)P(C).$$

Exemple 13. On lance deux fois une pièce équilibrée. Déterminer une famille d'événements (A, B, C) qui sont indépendants deux à deux, mais qui ne forment pas une famille d'événements mutuellement indépendants.
On pose $A =$ "le premier lancer donne pile", $B =$ "le deuxième lancer donne pile", et $C =$ "les deux lancers donnent le même résultat".
Pour $i = 1$ ou 2, on pose de plus $F_i =$ "le i-ème lancer donne face. Alors $P(A) = P(\overline{F_1}) = \frac{1}{2}$, $P(B) = P(\overline{F_2}) = \frac{1}{2}$ et $P(C) = P((F_1 \cap F_2) \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2})) = \frac{1}{2}$ (par dénombrement direct ou en remarquant que les événements de l'union sont incompatibles et les lancers sont indépendants). On a de plus :

$P(A \cap B) = P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$, donc A et B sont indépendants.

$P(A \cap C) = P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) = \frac{1}{4} = P(A)P(C)$, donc A et C sont indépendants.

$P(B \cap C) = P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) = \frac{1}{4} = P(B)P(C)$, donc B et C sont indépendants.

Par contre, $P(A \cap B \cap C) = P(P_1 \cap P_2) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$. Donc il ne s'agit pas d'une famille d'événements mutuellement indépendants.