Produits scalaires

Cours de É. Bouchet – PCSI

14 juin 2022

Table des matières

Dans ce chapitre, on se limite au cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1 Produits scalaires et normes

1.1 Produits scalaires

Définition (Produit scalaire).

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle **produit scalaire** sur E toute forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire toute application $\langle , \rangle$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui est :
- bilinéaire : $\forall (x, y, z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle \lambda x + y, z\rangle = \lambda \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ et $\langle x, \lambda y + z\rangle = \lambda \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$;
- symétrique : $\forall (x, y) \in E^2, \langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle$;
- définie : $\forall x \in E, \langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E$;
- positive : $\forall x \in E, \langle x, x\rangle \geqslant 0$.

Remarque. Suivant les contextes, le produit scalaire $\langle x, y\rangle$ peut aussi se noter $(x|y)$ ou $x \cdot y$.

Remarque. On montre en général la symétrie avant la bilinéarité, parce qu'il suffit alors de montrer la linéarité d'un seul côté (à droite ou à gauche, au choix).

Remarque. Soit $x \in E$, la linéarité à droite donne $\langle x, 0_E\rangle = \langle x, 0 \cdot 0_E\rangle = 0 \langle x, 0_E\rangle = 0$. La linéarité à gauche donne de même $\langle 0_E, x\rangle = 0$.

Définition (Espace préhilbertien réel, espace euclidien).

On appelle **espace préhilbertien réel** tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Si l'espace vectoriel est en plus de dimension finie, on parle d'**espace euclidien**.

Proposition (Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$).

L'application $\big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque. On retrouve les formules du lycée : pour tous vecteurs $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Remarque. En utilisant les notations matricielle, le produit matriciel canonique sur $\mathbb{R}^n$ s'écrit $\langle X, Y\rangle = X^\top Y$.

Démonstration. On vérifie (dans l'ordre qui nous arrange) les points de la définition :
- Symétrie : soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, $\langle y, x\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle x, y\rangle$.
- Bilinéarité : par symétrie, il suffit de montrer la linéarité à gauche. Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a bien :
$$\langle \lambda x + y, z\rangle = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + y_i) z_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i z_i + y_i z_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = \lambda \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle .$$
- Positivité et cas d'annulation : soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant 0$, d'où la positivité. On suppose maintenant que $\langle x, x\rangle = 0$. Comme c'est une somme de termes positifs, on en déduit $x_1^2 = \ldots = x_n^2 = 0$, puis $x_1 = \ldots = x_n = 0$ et $x = (0, \dots, 0)$. Donc la forme est définie positive.

Il s'agit donc bien d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. □

Remarque. En particulier, $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique est un espace euclidien.

Remarque. Le produit scalaire canonique n'est pas le seul produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 1. Montrer que l'application $\varphi : (X,Y) \mapsto X^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

On raisonne cette fois-ci sous forme matricielle pour alléger les calculs :

— Symétrie : soit X et Y dans $\mathbb{R}^2$. Comme $Y^\top \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) X$ est un réel, il est égal à sa transposée, donc :

$$\varphi(Y,X) = Y^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \left(Y^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X\right)^\top = X^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^\top Y = X^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y = \varphi(X,Y).$$

— Bilinéarité : comme l'application est symétrique, il suffit de montrer la linéarité à gauche. Soit X, Y, Z dans $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, les propriétés de la transposée et du produit matriciel donnent :

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda X + Y, Z) &= (\lambda X + Y)^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Z \\
&= (\lambda X^\top + Y^\top) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Z \\
&= \lambda X^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Z + Y^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Z \\
\varphi(\lambda X + Y, Z) &= \lambda \varphi(X,Z) + \varphi(Y,Z).
\end{aligned}$$

— Positivité et cas d'annulation : soit $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(X,X) = X^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{pmatrix} = 2x^2 + 2xy + 2y^2 = x^2 + y^2 + (x+y)^2 \geqslant 0.$$

On suppose maintenant que $\varphi(X,X) = 0$, alors : $x = y = x + y = 0$ car x^2, y^2 et $(x+y)^2$ sont positifs. Donc : $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

L'application φ est donc bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition.

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. L'application $(f,g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $C([a,b],\mathbb{R})$.

Démonstration. On revient à la définition d'un produit scalaire :

— Symétrie : soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, $\langle g, f\rangle = \int_a^b g(t)f(t)dt = \int_a^b f(t)g(t)dt = \langle f, g\rangle$.

— Bilinéarité : par symétrie, on se contente d'étudier la linéarité à gauche. Soit f, g, h des fonctions continues sur $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\langle \lambda f + g, h\rangle = \int_a^b (\lambda f(t) + g(t))h(t)dt = \int_a^b \lambda f(t)h(t)dt + \int_a^b g(t)h(t)dt = \lambda \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle.$$

— Positivité et cas d'annulation : soit f une fonction continue sur $[a,b]$, $\langle f, f\rangle = \int_a^b f(t)^2 dt \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale. On suppose maintenant que $\int_a^b f(t)^2 dt = 0$. Comme f est continue et positive, on obtient que $f^2 = 0$ sur $[a,b]$, donc $f = 0$.

On a donc bien défini un produit scalaire sur $C([a,b],\mathbb{R})$. □

Remarque. Muni du produit scalaire défini ci-dessus, $C([a,b],\mathbb{R})$ est un espace préhilbertien réel. Ce n'est par contre pas un espace euclidien car il n'est pas de dimension finie.

Remarque. Cette définition de produit scalaire s'adapte facilement à $\mathbb{R}[X]$. En effet, un polynôme qui s'annule sur $[a,b]$ s'annule en une infinité de points, donc possède une infinité de racines, donc est le polynôme nul.

1.2 Norme associée à un produit scalaire

Définition (Norme associée à un produit scalaire)**.**

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On appelle norme associée à ce produit scalaire l'application définie de E dans $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

On dit qu'un vecteur x de E est **unitaire** lorsque $\|x\| = 1$.

Définition (Distance associée à une norme)**.**

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(x, y) \in E^2$. On appelle **distance** entre x et y le réel

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Remarque. Attention : ces notions de norme et de distance dépendent du produit scalaire associé.
Par exemple, pour le produit scalaire $(X, Y) \longrightarrow X^\top \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) Y$ sur $\mathbb{R}^2$,

$$\|(1, 0)\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{2} \neq 1.$$

Proposition (Identité remarquable)**.**

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(x, y) \in E^2$,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la bilinéarité et de la symétrie :

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x + y\rangle + \langle y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

□

Remarque. On montre de même que $\forall (x, y) \in E^2$, $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$.

Proposition (Formule de polarisation)**.**

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(x, y) \in E^2$,

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right).$$

Démonstration. D'après l'identité remarquable, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$, isoler $\langle x, y\rangle$ donne alors directement le résultat. □

Remarque. En combinant les formules de $\|x + y\|^2$ et $\|x - y\|^2$, on montre aussi $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$.

Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(x, y) \in E^2$,

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\| \, ,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, les propriétés du produit scalaire donnent :

$$0 \leqslant \|x + ty\|^2 = \langle x + ty, x + ty\rangle = \langle x, x\rangle + 2t \langle x, y\rangle + t^2 \langle y, y\rangle \, .$$

— Si $\langle y, y\rangle = 0$, la fonction $t \mapsto \langle x, x\rangle + 2t \langle x, y\rangle$ est affine et positive sur $\mathbb{R}$ tout entier. Son coefficient directeur est donc nécessairement nul. Cela donne $\langle x, y\rangle = 0$, donc $|\langle x, y\rangle| = 0 = \|x\| \, \|y\|$.

— Si $\langle y, y\rangle \neq 0$, la fonction $t \mapsto \langle x, x\rangle + 2t \langle x, y\rangle + t^2 \langle y, y\rangle$ est polynomiale de degré 2 et positive sur $\mathbb{R}$ tout entier, donc son discriminant est négatif. Cela donne $4 \langle x, y\rangle^2 - 4 \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle \leqslant 0$, donc $\langle x, y\rangle^2 \leqslant \|x\|^2 \|y\|^2$ et par passage à la racine (strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$), $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\|$.
Il y a alors égalité si et seulement si le discriminant est nul, c'est-à-dire si et seulement si la fonction $t \mapsto \|x + ty\|^2$ s'annule. Cette annulation est équivalente a l'existence d'un réel $t_0 \in \mathbb{R}$ pour lequel $x + t_0 y = 0_E$, c'est-à-dire à la colinéarité de x et y.

$\square$

Remarque. Si nous avions défini le produit scalaire comme au lycée, à partir de normes et d'angles, l'inégalité de Cauchy-Schwarz serait immédiate : $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\cos(\vec{u}, \vec{v})| \leqslant \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$.

Exemple 2. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ et étudier le cas d'égalité.

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(1, \ldots, 1)$ pour $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2}.$$

Un passage au carré donne alors $\left(\sum_{i=1}^{n} 1 \times x_i\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Et il y a égalité si et seulement si $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(1, \ldots, 1)$ sont colinéaires, c'est-à-dire quand les x_i sont tous égaux.

Exemple 3. Montrer que pour toute fonction $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$, $f(1)^2 - f(0)^2 \leqslant 2\sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt}\sqrt{\int_0^1 f'(t)^2 dt}$.

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à f et f' dans l'espace préhilbertien réel $C([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel :

$$\left|\int_0^1 f(t) f'(t) dt\right| \leqslant \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt} \sqrt{\int_0^1 f'(t)^2 dt}.$$

Or $\int_0^1 f(t) f'(t) dt = \left[\frac{f(t)^2}{2}\right]_0^1 = \frac{f(1)^2 - f(0)^2}{2}$, d'où le résultat annoncé.

Proposition (Inégalité triangulaire).

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(x, y) \in E^2$,

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \, ,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens.

Démonstration. Les propriétés de la norme et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donnent :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2.$$

La croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ donne alors $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
Étudions maintenant le cas d'égalité. Il y a égalité si et seulement si $\langle x,y\rangle = \|x\|\,\|y\|$, reste à trouver les x et y auxquels ça correspond.

— Supposons $\langle x,y\rangle = \|x\|\,\|y\|$: d'après le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, les vecteurs x et y sont colinéaires. Quitte a les permuter, on peut supposer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$. On obtient alors d'une part :

$$\langle x,y\rangle = \langle x,\lambda x\rangle = \lambda\langle x,x\rangle = \lambda\|x\|^2,$$

et d'autre part :

$$\langle x,y\rangle = \|x\|\,\|y\| = \|x\|\,\|\lambda x\| = \|x\|\sqrt{\langle \lambda x,\lambda x\rangle} = \|x\|\sqrt{\lambda^2\langle x,x\rangle} = |\lambda|\,\|x\|^2.$$

Donc soit x est nul, soit $\lambda = |\lambda|$, c'est-à-dire $\lambda \geqslant 0$. Dans les deux cas, x et y sont colinéaires de même sens.

— Réciproquement, si x et y sont colinéaires de même sens, il est immédiat que l'égalité est vérifiée.

□

2 Orthogonalité

2.1 Premières définitions et propriétés

Définition (Vecteurs orthogonaux)**.**

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(x,y)\in E^2$. On dit que x et y sont **orthogonaux** et on note $x\perp y$ lorsque $\langle x,y\rangle = 0$.

Remarque. Soit $x\in E$, alors $x\perp x \iff \langle x,x\rangle = 0 \iff x = 0_E$, donc le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à lui-même.

Remarque. Dans ce chapitre, la notion d'orthogonalité dépend du produit scalaire pour lequel elle est définie, et ne correspond donc pas toujours à la définition géométrique vue au lycée.

Définition (Orthogonal d'une partie)**.**

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace préhilbertien réel et X une partie de E. On appelle **orthogonal** de X, noté $X^\perp$, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de X :

$$X^\perp = \{y\in E \mid \forall x\in X, \langle y,x\rangle = 0\}.$$

Proposition.

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace préhilbertien réel et X une partie de E, alors $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

— $\forall x\in X$, $\langle x,0_E\rangle = 0$, donc $0_E\in X^\perp$.

— Soit $(y,z)\in (X^\perp)^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors $\forall x\in X$, $\langle \lambda y+z,x\rangle = \lambda\langle y,x\rangle + \langle z,x\rangle = \lambda\times 0+0 = 0$. Donc $\lambda y+z\in X^\perp$.

Donc $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Proposition.

Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace préhilbertien réel et X une sous-partie de E. Alors $X^\perp = \text{Vect}(X)^\perp$ et $X \subset X^{\perp\perp}$.

Démonstration. Il est immédiat que si un vecteur est orthogonal à tous les éléments de $\text{Vect}(X)$, il est en particulier orthogonal aux éléments de X, donc $\text{Vect}(X)^\perp \subset X^\perp$. Réciproquement, si un vecteur est orthogonal aux éléments de X, par linéarité à droite (ou à gauche) du produit scalaire, il est orthogonal à toutes les combinaisons linéaires d'éléments de X, donc à $\text{Vect}(X)$. Donc $X^\perp \subset \text{Vect}(X)^\perp$. Donc par double inclusion, $X^\perp = \text{Vect}(X)^\perp$.
Pour le deuxième point : Soit $x \in X$, alors $\forall y \in X^\perp$, $\langle x, y\rangle = 0$. Donc $x \in (X^\perp)^\perp$. Donc $X \subset X^{\perp\perp}$. □

Remarque. L'égalité $X^\perp = \text{Vect}(X)^\perp$ signifie que pour déterminer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel engendré par un ensemble X, il est suffisant d'exiger l'orthogonalité aux éléments de X.

Remarque. Contrairement aux apparences, dans le cas général, $F^{\perp\perp} \neq F$. D'ailleurs, F n'est pas nécessairement un espace vectoriel alors que $F^{\perp\perp}$ en est un.

Exemple 4. Soit E un espace préhilbertien réel, alors $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$. En effet, 0_E est le seul vecteur de E orthogonal à tout vecteur.

Exemple 5. Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique et $X = \text{Vect}((1,1))$. Déterminer $X^\perp$.
Soit $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$u \in X^\perp \iff u \in \text{Vect}((1,1))^\perp \iff u \in \{(1,1)\}^\perp \iff \langle (u_1,u_2),(1,1)\rangle = 0 \iff u_1 + u_2 = 0.$$

On en déduit :

$$u \in X^\perp \iff u = (u_1, -u_1) \iff u = u_1(1,-1) \iff u \in \text{Vect}((1,-1)).$$

Donc $X^\perp = \text{Vect}((1,-1))$.

Définition (Familles orthogonales ou orthonormées).

Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace préhilbertien réel. On dit qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs est
- **orthogonale** lorsque pour tous $(i,j) \in I^2$ tels que $i \neq j$, $\langle x_i, x_j\rangle = 0$.
- **orthonormée (ou orthonormale)** lorsqu'elle est orthogonale et constituée de vecteurs unitaires, c'est-à-dire lorsque pour tous $(i,j) \in I^2$, $\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{ij}$.

Exemple 6. Pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, la base canonique $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale. En effet, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $E_i^\top E_j = \delta_{ij}$.

Exemple 7. Pour le produit scalaire $(X,Y) \mapsto X^\top \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2\end{smallmatrix}\right) Y$ sur $\mathbb{R}^2$, montrer que la base canonique n'est pas orthonormale, mais que la famille $\left(\frac{(1,0)}{\sqrt{2}}, \frac{(1,-2)}{\sqrt{6}}\right)$ l'est.
On calcule $\langle (1,0),(0,1)\rangle = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2\end{smallmatrix}\right) = 1 \neq 0$, donc la base canonique n'est pas orthonormale (elle n'est même pas orthogonale). Par contre :
- $\left\langle \frac{(1,0)}{\sqrt{2}}, \frac{(1,-2)}{\sqrt{6}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2\end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{12}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -3\end{smallmatrix}\right) = 0$,
- $\left\| \frac{(1,0)}{\sqrt{2}} \right\|^2 = \frac{1}{2}\|(1,0)\|^2 = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0\end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1\end{smallmatrix}\right) = \frac{2}{2} = 1$,
- $\left\| \frac{(1,-2)}{\sqrt{6}} \right\|^2 = \frac{1}{6}\|(1,-2)\|^2 = \frac{1}{6}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2\end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{6}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -3\end{smallmatrix}\right) = \frac{6}{6} = 1$.

Donc la famille $\left(\frac{(1,0)}{\sqrt{2}}, \frac{(1,-2)}{\sqrt{6}}\right)$ est orthonormale.

Exemple 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $s_n : t \mapsto \sin(nt)$. Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est orthonormale dans $C([0,2\pi],\mathbb{R})$ pour le produit scalaire $(f,g) \mapsto \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$.

Soit $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $n \neq m$, les formules trigonométriques donnent :

$$\langle s_m, s_n\rangle = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(nt)\sin(mt)}{\pi} dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos((m-n)t) - \cos((m+n)t)}{2\pi} dt = \left[\frac{\sin((m-n)t)}{2\pi(m-n)} - \frac{\sin((m+n)t)}{2\pi(m+n)}\right]_0^{2\pi} = 0$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on trouve de même :

$$\|s_n\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2nt)}{2} dt = 1 - \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(2nt)}{4n}\right]_0^{2\pi} = 1.$$

La famille est donc bien orthonormée.

Proposition (Familles orthogonales et liberté)**.**

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Toute famille orthogonale de vecteurs de E non nuls est libre.

Démonstration. Soient $(x_1, \dots, x_n)$ une famille orthogonale de vecteurs de E non nuls et soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. On suppose $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0_E$. Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$0 = \langle 0_E, x_i\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k, x_i \right\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x_k, x_i\rangle = \lambda_i \|x_i\|^2 .$$

Or $\|x_i\| \neq 0$ puisque $x_i \neq 0_E$, donc : $\lambda_i = 0$. Donc $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre. □

Remarque. En particulier, toute famille orthonormale de vecteurs de E est libre (les vecteurs étant unitaires, ils ne peuvent pas être nuls).

Proposition (Théorème de Pythagore)**.**

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit $(x,y) \in E^2$, alors :

$$x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

Démonstration. On sait que $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$ (identité remarquable). Donc :

$$x \perp y \iff \langle x, y\rangle = 0 \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

□

Remarque. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille orthogonale de E, alors on a de même $\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$.

2.2 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Proposition (Orthonormalisation de Gram-Schmidt)**.**

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E. On peut transformer $(e_1, \dots, e_n)$ en une famille orthonormale de E $(u_1, \dots, u_n)$ telle que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k).$$

Exemple 9. Soit (e_1, e_2) une famille libre de E, qu'on souhaite transformer en famille orthonormée.

— On pose $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$. Ainsi, u_1 est une famille orthonormale (on vient de le normer) et $\mathrm{Vect}(u_1) = \mathrm{Vect}(e_1)$.
— Il faut maintenant construire un vecteur orthogonal à u_1. Pour cela, on pose $v = e_2 - \langle e_2, u_1\rangle u_1$ (faire le dessin justifiant cette définition). On a bien :

$$\langle v, u_1\rangle = \langle e_2 - \langle e_2, u_1\rangle u_1, u_1\rangle = \langle e_2, u_1\rangle - \langle e_2, u_1\rangle \langle u_1, u_1\rangle = \langle e_2, u_1\rangle - \langle e_2, u_1\rangle 1 = 0.$$

De plus $\mathrm{Vect}(u_1, v) = \mathrm{Vect}(u_1, e_2 - \langle e_2, u_1\rangle u_1) = \mathrm{Vect}(u_1, e_2) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.
— On pose alors $u_2 = \frac{e_2 - \langle e_2, u_1\rangle u_1}{\|e_2 - \langle e_2, u_1\rangle u_1\|}$, pour créer un vecteur unitaire conservant les propriétés précédentes.

On a donc bien construit une famille orthonormale (u_1, u_2).

Démonstration. Soit $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $P(k)$: « il existe une famille orthonormale de E $(u_1, \ldots, u_k)$ telle que $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ ».
— (e_1) est libre, donc $e_1 \neq 0_E$, ce qui permet de poser $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$. Par construction, u_1 est unitaire et $\mathrm{Vect}(e_1) = \mathrm{Vect}(u_1)$, donc $P(1)$ est vraie.
— Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Supposons que $P(k-1)$ est vraie. Alors il existe une famille orthonormale $(u_1, \ldots, u_{k-1})$ pour laquelle $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_{k-1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{k-1})$.
On pose $v_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i\rangle u_i$. Comme $(e_1, \ldots, e_k)$ est libre, $v_k \neq 0_E$ (sinon e_k serait combinaison linéaire de $(u_1, \ldots, _{k-1})$ et donc de $(e_1, \ldots, e_{k-1})$). On peut ainsi poser $u_k = \frac{v_k}{\|v_k\|}$ (ou son opposé).
Montrons que la famille $(u_1, \ldots, u_k)$ est orthonormale. On sait que $(u_1, \ldots, u_{k-1})$ l'est. De plus, u_k est unitaire. Il suffit donc de montrer que u_k est orthogonal à u_1,...,u_{k-1}. Soit $j \in [\![1, k-1]\!]$, on a bien :

$$\langle u_k, u_j\rangle = \frac{1}{\|v_k\|} \langle v_k, u_j\rangle = \frac{1}{\|v_k\|} \left\langle e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i\rangle u_i, u_j \right\rangle = \frac{1}{\|v_k\|} (\langle e_k, u_j\rangle - \langle e_k, u_j\rangle \langle u_j, u_j\rangle) = 0.$$

Enfin, $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_{k-1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{k-1})$ et u_k est combinaison linéaire de u_1,...,u_{k-1} et e_k avec un coefficient non nul devant e_k, donc : $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$. Donc $P(k)$ est vraie.

Donc $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(k)$ est vrai, ce qui montre le résultat annoncé. □

Remarque. Cette démonstration fournit au passage une méthode de construction récursive :
poser $u_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$ puis pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $u_k = \dfrac{e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i\rangle u_i}{\left\|e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i\rangle u_i\right\|}$.

Exemple 10. On se place sur $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$. Déterminer une base orthonormale (P_0, P_1, P_2).
On applique l'algorithme de Gram-Schmidt à la famille libre (car base canonique) $(1, X, X^2)$:
— On pose $P_0(X) = \frac{1}{\|1\|}$. Or, $\|1\|^2 = \int_0^1 1^2 dt = 1$, donc $P_0(X) = 1$.
— On pose $P_1(X) = \frac{X - \langle X, P_0(X)\rangle P_0(X)}{\|X - \langle X, P_0(X)\rangle P_0(X)\|}$. Comme $\langle X, P_0(X)\rangle = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$, le polynôme au numérateur vaut $X - \frac{1}{2}$. Il reste à calculer sa norme : $\left\|X - \frac{1}{2}\right\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{12}$, donc par passage à la racine, $P_1(X) = \sqrt{12}(X - \frac{1}{2}) = \sqrt{3}(2X - 1)$.
— On pose $P_2(X) = \frac{X^2 - \left\langle X^2, P_0(X)\right\rangle P_0(X) - \left\langle X^2, P_1(X)\right\rangle P_1(X)}{\|X^2 - \langle X^2, P_0(X)\rangle P_0(X) - \langle X^2, P_1(X)\rangle P_1(X)\|}$. Comme on a $\left\langle X^2, P_0(X)\right\rangle = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$ et $\left\langle X^2, P_1(X)\right\rangle = \int_0^1 t^2 \times \sqrt{3}(2t-1)dt = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, le polynôme au numérateur vaut $X^2 - X + \frac{1}{6}$. Il reste à calculer sa norme : $\left\|X^2 - X + \frac{1}{6}\right\|^2 = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \int_0^1 t^4 + t^2 + \frac{1}{36} - 2t^3 + \frac{t^2}{3} - \frac{t}{3} dt = \int_0^1 t^4 - 2t^3 + \frac{4t^2}{3} - \frac{t}{3} + \frac{1}{36} dt$, donc par calcul d'intégrale $\left\|X^2 - X + \frac{1}{6}\right\|^2 = \frac{1}{5} - \frac{2}{4} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{1}{180}$, donc par passage à la racine $P_2(X) = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)$.

2.3 Bases orthonormées

Proposition (Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien).

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Alors E possède une base orthonormale.

Démonstration. E est un espace vectoriel de dimension finie non nulle, donc possède une base. Il suffit de l'orthonormaliser par l'algorithme de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormale. $\square$

Proposition (Théorème de la base orthonormée incomplète).

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale de E.

Démonstration. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille orthonormale, donc libre, de E. Comme E est de dimension finie non nulle, le théorème de la base incomplète permet de la compléter en une base de E. On orthonormalise ensuite cette base par l'algorithme de Gram-Schmidt. Par construction,les premiers vecteurs $e_1, \ldots, e_p$ ne seront pas affectés (puisqu'ils forment déjà une famille orthonormale). On a donc complété $(e_1, \ldots, e_p)$ en une base orthonormale de E. $\square$

Proposition (Coordonnées dans une base orthonormée).

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E et $x \in E$. Alors les coordonnées de x dans $(e_1, \ldots, e_n)$ sont $(\langle x, e_1\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle)$. Autrement dit,

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k.$$

Démonstration. On pose $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\langle x, e_k\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, e_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \langle e_i, e_k\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \delta_{ik} = x_k.$$

$\square$

Proposition (Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée).

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x, y) \in E^2$ de coordonnées respectives $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ dans une base orthonormale de E. Alors :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \text{ et } \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

Démonstration. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base orthonormale considérée. On a alors :

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Le résultat sur la norme découle alors de la relation $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. $\square$

Remarque. Attention, ces formules sont fausses dans le cas général (pour des coordonnées dans une base non orthonormée).

Remarque. Sous forme matricielle, avec des vecteurs colonnes de coordonnées X et Y, cela donne $\langle X, Y\rangle = X^\top Y$ et $\|X\| = \sqrt{X^\top X}$.

3 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

3.1 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace

Proposition.

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F et $F^\perp$ sont en somme directe.

Démonstration. Comme F est un sous-espace vectoriel de E, on a $0_E \in F \cap F^\perp$. Réciproquement, soit $x \in F \cap F^\perp$. Alors $x \perp x$, donc $\langle x, x \rangle = 0$. Par propriétés du produit scalaire, on en déduit $x = 0_E$. Donc $F \cap F^\perp = \{0_E\}$. $\square$

Remarque. Attention : on a montré que F et $F^\perp$ sont en somme directe, mais ils ne sont pas nécessairement supplémentaires dans E.

Définition (Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie)**.**

Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Il existe un unique supplémentaire de F dans E orthogonal à F, et c'est $F^\perp$. On l'appelle donc **le supplémentaire orthogonal** de F dans E et on note :

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp.$$

Démonstration. Si $F = \{0_E\}$, $F^\perp = E$ et le résultat est immédiat.
Dans le cas contraire, comme F est de dimension finie, il possède une base orthonormale $(f_1, \dots, f_n)$. On sait déjà que $F \cap F^\perp = \{0_E\}$, il reste à montrer que $E = F + F^\perp$. L'inclusion $F + F^\perp \subset E$ est immédiate, montrons $E \subset F + F^\perp$. Soit $x \in E$, alors $x = (\sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k) + (x - \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k)$, avec $\sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k \in F$. De plus, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\left\langle x - \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k, f_i \right\rangle = \langle x, f_i \rangle - \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle \langle f_k, f_i \rangle = \langle x, f_i \rangle - \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle \delta_{ki} = \langle x, f_i \rangle - \langle x, f_i \rangle = 0.$$

Donc $x - \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k$ est orthogonal à $f_1, \dots, f_n$, donc élément de $F^\perp$. La décomposition précédente donne donc $x \in F + F^\perp$, ce qu'on voulait. Donc $E = F \oplus F^\perp$.
Montrons maintenant l'unicité. Soit G un supplémentaire de F dans E orthogonal à F.
- Soit $x \in G$, alors $\forall f \in F$, $\langle x, f \rangle = 0$, donc $x \in F^\perp$. Donc $G \subset F^\perp$
- Réciproquement, soit $x \in F^\perp$. Comme $E = F + G$, on peut écrire $x = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. On a alors $\langle f, f \rangle = \langle f, f \rangle + \langle g, f \rangle = \langle f + g, f \rangle = \langle x, f \rangle = 0$. Par propriété du produit scalaire, on en déduit $f = 0_E$, donc $x = g \in G$. Donc $F^\perp \subset G$.

Donc par double inclusion, $G = F^\perp$. D'où l'unicité. $\square$

Remarque. Attention : F doit être de dimension finie pour que ce résultat s'applique.

Remarque. En particulier, si E lui-même est de dimension finie : $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$.

Remarque. Il existe un unique supplémentaire orthogonal, mais de nombreux supplémentaires « tout court ».

Proposition.

Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors $F^{\perp\perp} = F$.

Démonstration. On sait déjà que $F \subset F^{\perp\perp}$. Soit $x \in F^{\perp\perp}$, on peut le décomposer comme $x = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in F^{\perp}$. Donc $\langle g, g\rangle = \langle g, g\rangle + \langle f, g\rangle = \langle f + g, g\rangle = \langle x, g\rangle = 0$. On en déduit que $g = 0_E$ et donc $x = f \in F$. Donc $F^{\perp\perp} \subset F$ et on conclut par double inclusion. $\square$

Exemple 11. Dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^4$, on s'intéresse au plan vectoriel P d'équations : $x-y-z-t = 0$ et $2x + y + z - t = 0$. Déterminer son supplémentaire orthogonal.
On commence par constater que :

$$\begin{aligned}
P &= \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \middle| \, \langle(1, -1, -1, -1), (x, y, z, t)\rangle = 0 \text{ et } \langle(2, 1, 1, -1), (x, y, z, t)\rangle = 0\right\} \\
&= \{(1, -1, -1, -1), (2, 1, 1, -1)\}^{\perp} \\
P &= \mathrm{Vect}((1, -1, -1, -1), (2, 1, 1, -1))^{\perp}
\end{aligned}$$

Or $\mathbb{R}^4$ est euclidien, donc $P^{\perp} = \mathrm{Vect}((1, -1, -1, -1), (2, 1, 1, -1))^{\perp\perp} = \mathrm{Vect}((1, -1, -1, -1), (2, 1, 1, -1))$.

Définition (Vecteur normal à un hyperplan).

Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et H un hyperplan de E. Le sous-espace $H^{\perp}$ est une droite dont tout vecteur non nul est appelé **vecteur normal** à H.

Démonstration. Comme E est de dimension finie, $E = H \oplus H^{\perp}$ donc $\dim(E) = \dim(H) + \dim(H^{\perp})$. Comme H est un hyperplan, on en déduit $\dim(H^{\perp}) = 1$, $H^{\perp}$ est donc bien une droite vectorielle. $\square$

Remarque. Comme $H = \{a\}^{\perp} = \{x \in E | \, \langle x, a\rangle = 0\}$, H est le noyau de la forme linéaire non nulle $x \mapsto \langle x, a\rangle$.

3.2 Projections orthogonales et propriétés

Définition (Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie).

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On appelle **projection orthogonale** sur F la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

Remarque. Comme F est de dimension finie, on a bien $E = F \oplus F^{\perp}$, ce qui permet de définir le projecteur associé.

Proposition (Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormée).

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ une base orthonormée de F. On note p la projection orthogonale sur F. Alors :

$$\forall x \in E, \quad p(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k\rangle \, f_k.$$

Démonstration. Soit $x \in E$. On peut le décomposer sous la forme $x = \left(\sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k\rangle \, f_k\right) + \left(x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k\rangle \, f_k\right)$, avec $\sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k\rangle \, f_k \in F$. Montrons que $x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k\rangle \, f_k \in F^{\perp}$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k\rangle \, f_k, f_i \right\rangle = \langle x, f_i\rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k\rangle \langle f_k, f_i\rangle = \langle x, f_i\rangle - \langle x, f_i\rangle = 0,$$

ce qu'on voulait montrer. On a donc trouvé la décomposition sur $F \oplus F^{\perp}$, ce qui donne $p(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k\rangle \, f_k$. $\square$

Remarque. Quand on dispose des coordonnées dans une base orthonormée, on obtient donc facilement les projetés orthogonaux. Dans le cas contraire, on a deux stratégies de calcul :
- Première possibilité : construire (avec Gram-Schmidt) une base orthonormée et se ramener à la formule.
- Deuxième possibilité : utiliser les relations $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^\perp$ (faire le dessin associé).

Exemple 12. Soit $F = \text{Vect}(\sin, \cos)$, qui est un sous-espace vectoriel de $C([0, 2\pi], \mathbb{R})$. Déterminer le projeté orthogonal de id sur F pour le produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$.
On s'intéresse tout d'abord à la famille $(\sin, \cos)$, pour déterminer si c'est une base orthonormée :
- $\langle \sin, \cos \rangle = \int_0^{2\pi} \sin(t)\cos(t)dt = \left[\frac{\sin^2(t)}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$. Donc la famille $(\sin, \cos)$ est orthogonale.
- $\|\sin\|^2 = \int_0^{2\pi} \sin^2(t)dt = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2}dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi$.
- $\|\cos\|^2 = \int_0^{2\pi} \cos^2(t)dt = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi$.

Pour la suite, on aura aussi besoin des valeurs de $\langle \text{id}, \cos \rangle$ et $\langle \text{id}, \sin \rangle$, que l'on calcule donc en prévision. Une intégration par parties (les fonctions étant de classe C^1 sur $[0, 2\pi]$) donne :

$$\int_0^{2\pi} te^{it}dt = \left[t\frac{e^{it}}{i}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{i}dt = -2i\pi + i\left[\frac{e^{it}}{i}\right]_0^{2\pi} = -2i\pi + 0 = -2i\pi,$$

donc $\langle \text{id}, \sin \rangle = \int_0^{2\pi} t\sin(t)dt = \text{Im}\left(\int_0^{2\pi} te^{it}dt\right) = \text{Im}(-2i\pi) = -2\pi$ et $\langle \text{id}, \cos \rangle = \text{Re}\left(\int_0^{2\pi} te^{it}dt\right) = \text{Re}(-2i\pi) = 0$.
On compare maintenant les deux stratégies de calcul disponibles :
- Première stratégie : on orthonormalise cette base de F par Gram-Schmidt. Cette famille étant déjà orthogonale, $\left(\frac{\sin}{\|\sin\|}, \frac{\cos}{\|\cos\|}\right) = \left(\frac{\sin}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos}{\sqrt{\pi}}\right)$ est une base orthonormale de F. Le projeté orthogonal de id sur F est donc :
$$\left\langle \text{id}, \frac{\sin}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\sin}{\sqrt{\pi}} + \left\langle \text{id}, \frac{\cos}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\cos}{\sqrt{\pi}} = \frac{\langle \text{id}, \sin \rangle}{\pi}\sin + \frac{\langle \text{id}, \cos \rangle}{\pi}\cos = -2\sin.$$
- Deuxième stratégie : on note $p(\text{id})$ le projeté orthogonal de id sur F et (λ, μ) ses coordonnées dans la base $(\sin, \cos)$ de F. Alors $p(\text{id}) = \lambda\sin + \mu\cos$. Or on sait que $\text{id} - p(\text{id}) \in F^\perp$, ce qui donne deux relations :
$$0 = \langle \text{id} - p(\text{id}), \sin \rangle = \langle \text{id} - \lambda\sin - \mu\cos, \sin \rangle = \langle \text{id}, \sin \rangle - \lambda\|\sin\|^2 - \mu\langle \cos, \sin \rangle = -2\pi - \lambda\pi,$$
$$0 = \langle \text{id} - p(\text{id}), \cos \rangle = \langle \text{id} - \lambda\sin - \mu\cos, \cos \rangle = \langle \text{id}, \cos \rangle - \lambda\langle \sin, \cos \rangle - \mu\|\cos\|^2 = -\mu\pi.$$
Résoudre ce système donne $\lambda = -2$ et $\mu = 0$, et donc $p(\text{id}) = -2\sin$.

Remarque. De manière générale, quand on se trouve dans un espace euclidien et qu'on veut projeter orthogonalement sur un sous-espace F, on préfère :
- projeter directement sur F si $\dim(F) \leqslant \dim(F^\perp)$,
- projeter d'abord sur $F^\perp$ sinon.

Exemple 13. Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et H un hyperplan de E de vecteur normal a. On note p la projection orthogonale sur H. Soit $x \in E$, déterminer $p(x)$.
Notons p_a la projection orthogonale sur $\text{Vect}(a) = H^\perp$. On sait que $\left(\frac{a}{\|a\|}\right)$ est une base orthonormale de $\text{Vect}(a)$, donc $p_a(x) = \frac{\langle x, a \rangle a}{\|a\|^2}$. Or p et p_a sont des projecteurs associés, donc $p + p_a = \text{id}_E$. On en déduit que $p(x) = x - \frac{\langle x, a \rangle a}{\|a\|^2}$.

3.3 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

Définition (Distance à une partie)**.**

Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel, A une partie non vide de E et $x \in E$. On appelle **distance** de x à A, notée $d(x, A)$, le réel :
$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

Démonstration. L'ensemble $\{\|x-a\| \,|a \in A\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (car $A \neq \emptyset$) et minorée par 0. Par propriété de la borne inférieure, le réel $d(x, A)$ est donc bien défini. $\square$

Remarque. Intuitivement, la distance d'un vecteur x à une partie A est la plus petite distance séparant x d'un élément de A. On utilise une borne inférieure et pas un minimum pour éviter de se poser la question de l'existence de cette plus petite distance.

Proposition (Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie)**.**

Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et $x \in E$. Alors la projection orthogonale de x sur F, notée $p(x)$, est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F. En particulier,

$$d(x, F) = \|x - p(x)\|.$$

Démonstration. Soit $f \in F$, alors $x-f = (x-p(x))+(p(x)-f)$. Or $x-p(x) \in \mathrm{Ker}(p) = F^{\perp}$ et $p(x)-f \in \mathrm{Im}(p) = F$, donc d'après le théorème de Pythagore, $\|x-f\|^2 = \|x-p(x)\|^2 + \|p(x)-f\|^2$.
On pose $D = \{\|x-f\| \,|f \in F\}$, alors :

— $\|x-p(x)\| \in D$ puisque $p(x) \in F$.
— par le calcul précédent, $\forall f \in F$, $\|x-f\| = \sqrt{\|x-p(x)\|^2 + \|p(x)-f\|^2} \geqslant \|x-p(x)\|$. Donc D est minoré par $\|x-p(x)\|$.

Donc $\|x-p(x)\| = \min(D)$, ce qui garantit que $\|x-p(x)\| = \inf(D) = d(x, F)$.
Enfin, pour tout $f \in F \setminus \{p(x)\}$, $\|x-f\| = \sqrt{\|x-p(x)\|^2 + \|p(x)-f\|^2} > \|x-p(x)\|$ car $p(x)-f \neq 0$, donc par propriété de la norme $\|p(x)-f\| > 0$. La distance $d(x, F)$ n'est donc atteinte qu'en $p(x)$. $\square$