Récurrence, sommes, produits

Cours de É. Bouchet – ECS1

20 septembre 2018

Table des matières

1 Principe de récurrence

1.1 Récurrence simple

Proposition (Principe de récurrence).

Soit n un entier, et $P(n)$ une propriété dépendant de n. Si $P(n_0)$ est vraie (initialisation) et si $\forall n \geqslant n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (hérédité) alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Formule (Somme des premiers entiers).

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Remarque. Ces formules restent vraies pour des sommes partant de 1, puisque le terme en $k=0$ est nul.

Démonstration. (démonstration à connaître) La preuve des deux premiers résultats figure dans le devoir de rentrée. Pour le troisième : soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ».

— Initialisation : $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0 = \left(\frac{0 \times 1}{2}\right)^2$ donc $P(0)$ est vraie.

— Soit $n \geqslant 0$, un entier naturel fixé. Supposons que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{P(n)}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}.$$

Or

$$\frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2+4n+4\right) = \frac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{4}\right)^2.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

On conclut que : $\forall n \geqslant 0$, $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. □

1.2 Récurrence double

Proposition (Récurrence double).

Soit n un entier, et $P(n)$ une propriété dépendant de n. Si $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies (initialisation) et si $\forall n \geqslant n_0$, $(P(n)$ et $P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$ (hérédité) alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Exemple 1. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$.
Conjecture : On remarque que $u_2 = 9$, puis que $u_3 = 27$. On conjecture alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P(n)$: « $u_n = 3^n$ ».

Initialisation : On a $u_0 = 3^0$ donc $P(0)$ est vraie, et $u_1 = 3^1$ donc $P(1)$ est vraie.
Soit $n \geqslant 0$ un entier naturel fixé. On suppose que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2u_{n+1} + 3u_n \\ &\overset{P(n)}{=} 2 \cdot 3^{n+1} + 3 \cdot 3^n \\ &= 3^n(6+3) \\ &= 3^{n+2} \end{aligned}$$

Donc $P(n+2)$ est vraie.
On conclut que : $\forall n \geqslant 0$, $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n$.

1.3 Récurrence forte

Proposition (Récurrence forte)**.**

Soit n un entier, et $P(n)$ une propriété dépendant de n. Si $P(n_0)$ est vraie (initialisation) et si $\forall n \geqslant n_0$, $(\forall k \in [\![n_0, n]\!], P(k)) \Rightarrow P(n+1)$ (hérédité) alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Exemple 2. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}(u_0 + u_1 + \cdots + u_n)$.
Conjecture : On remarque que $u_1 = 1$, puis que $u_2 = 1$. On conjecture alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P(n)$: « $u_n = 1$ ».
Initialisation : On a $u_0 = 1$ donc $P(0)$ est vraie.
Soit $n \geqslant 0$, un entier naturel fixé. On suppose que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(k)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{n+1}(u_0 + u_1 + \cdots + u_n) \\ &\overset{P(k)}{=} \frac{1}{n+1}(1 + 1 + \cdots + 1) \\ &= \frac{n+1}{n+1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.
On conclut que : $\forall n \geqslant 0$, $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.

2 Sommes

2.1 Notation

Définition (Somme)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \ldots, u_n$ des réels. On note $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i$.

Plus généralement, pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$, on note $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \displaystyle\sum_{i=p}^{n} u_i$, et cette somme contient $n - p + 1$ termes.

Dans la somme $\sum_{i=p}^{n} u_i$, i s'appelle **l'indice**, p et n sont **les bornes** de la somme. L'indice d'une somme est dit *muet*, ce qui signifie que l'on peut écrire : $\sum_{i=p}^{n} u_i = \sum_{j=p}^{n} u_j$.

Remarque. On peut parfois rencontrer d'autres notations, comme $\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} u_k$, ou encore $\sum_{k \in A} u_k$, avec A un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$. Les sommes précédentes correspondent au cas particulier :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} u_k = \sum_{k \in [\![0,n]\!]} u_k.$$

Remarque. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $p > n$. Par convention, on pose $\sum_{i=p}^{n} u_i = 0$.

Exemple 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On peut écrire :

$$\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n \text{ termes}} = \sum_{i=1}^{n} 1, \quad \underbrace{a+a+a+\cdots+a}_{n \text{ termes}} = \sum_{i=1}^{n} a,$$

$$2+4+6+\cdots+2n = \sum_{i=1}^{n} 2i, \quad 1+3+5+\cdots+(2n+1) = \sum_{i=0}^{n}(2i+1).$$

Et donc $1+3+5+\cdots+2013 = \sum_{i=0}^{1006}(2i+1)$.

2.2 Linéarité

Soit a et b deux réels. On remarque que $(a+b)+(2a+b)+\cdots+(na+b) = a(1+2+\cdots+n)+nb$, et donc que :

$$\sum_{k=1}^{n}(ka+b) = a\sum_{k=1}^{n} k + b\sum_{k=1}^{n} 1.$$

De manière plus générale, on a :

Formule (Linéarité de la somme)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n$ des réels. Alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n}(x_k + \lambda y_k) = \sum_{k=0}^{n} x_k + \lambda \sum_{k=0}^{n} y_k.$$

Exemple 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 - 2\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n-5)}{6}.$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} ki\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(i\sum_{k=1}^{n} k\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(i\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{m} i = \frac{n(n+1)m(m+1)}{4}.$$

2.3 Changement d'indice

2.3.1 Translation

On peut écrire $u_{10+0} + u_{10+1} + \cdots + u_{10+13} = u_{10} + u_{11} + \cdots + u_{23}$ et on a donc :

$$\sum_{k=0}^{13} u_{10+k} = \sum_{i=10}^{23} u_i.$$

On dit que l'on a effectué le changement d'indice $i = 10 + k$.

Exemple 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 = \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}, \quad \text{en posant } j = k-1.$$

2.3.2 Retournement

Soit $n \in \mathbb{N}$. On peut écrire $u_n + u_{n-1} + \cdots + u_0 = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ et on a donc :

$$\sum_{k=0}^{n} u_{n-k} = \sum_{i=0}^{n} u_i.$$

On dit que l'on a effectué le changement d'indice $i = n - k$.

Exemple 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\sum_{k=1}^{n} (n-k)^3 = \sum_{j=0}^{n-1} j^3 = \frac{(n-1)^2 n^2}{4}, \quad \text{en posant } j = n-k.$$

Remarque. ATTENTION : il est interdit de « sauter » des indices, par exemple de ne prendre que les termes pairs, ou de poser $k = 2i$. Pour faire un changement d'indices, il faut des entiers *consécutifs* et le *même nombre de termes* dans les deux sommes.

2.4 Sommes télescopiques

Formule (Somme télescopique)**.**

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

Démonstration. (démonstration à connaître) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) &= \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k \\
&\overset{i=k+1}{=} \sum_{i=1}^{n+1} u_i - \sum_{k=0}^{n} u_k \\
&= u_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} u_i - u_0 - \sum_{k=1}^{n} u_k \\
&= u_{n+1} - u_0
\end{aligned}$$

□

Exemple 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{k+1} - \left(-\frac{1}{k}\right)\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

en posant $u_k = -\frac{1}{k}$.

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1),$$

en posant $u_k = \ln(k)$.

Formule (Somme des termes d'une suite géométrique)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$,

— Si $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$,

— Si $q = 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = n+1$.

Démonstration. (démonstration à connaître) Soit $q \in \mathbb{R}$, si $q = 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$ car la somme contient $n+1$ termes.

Si $q \neq 1$, on trouve par télescopage :

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} (q^k - q^{k+1}) = -q^{n+1} - (-1) = 1 - q^{n+1}.$$

En divisant par $1-q \neq 0$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. □

Remarque. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$ Soit $q \neq 1$. On peut montrer de même que :

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q} = q^p \frac{1-q^{n+1-p}}{1-q}.$$

Ce résultat se retrouve également par changement d'indice :

$$\sum_{k=p}^{n} q^k \overset{j=k-p}{=} \sum_{j=0}^{n-p} q^{j+p} = q^p \sum_{j=0}^{n-p} q^j = q^p \frac{1-q^{n+1-p}}{1-q}.$$

2.5 Sommes doubles

Lorsqu'on a une somme double où les indices des deux sommes ne dépendent pas l'un de l'autre, on peut intervertir les sommes, et donc sommer dans l'ordre qu'on préfère (c'est le cas notamment de la somme de l'exemple 4). Ce n'est pas le cas si les indices dépendent l'un de l'autre.

Exemple 8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$.

On commence par chercher l'expression la plus simple : $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} ij = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} ij$.

Ici, la deuxième expression est plus intéressante, car elle permet de se ramener aux formules de cours. On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij &= \sum_{j=0}^{n}\left(j\sum_{i=0}^{j} i\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n} j\frac{j(j+1)}{2}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} j^3 + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} j^2\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
&= \frac{1}{4}n(n+1)\left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n+1}{3}\right)\\
&= \frac{1}{24}n(n+1)(3n^2+7n+2)\\
\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij &= \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1).
\end{aligned}$$

3 Produits

3.1 Factorielle

Définition (Factorielle)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle **factorielle n** la quantité

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

On a alors $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, ...

Remarque. Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n!}{n} = (n-1)!$.

3.2 Notation générale

Définition (Produit)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $x_1, \ldots, x_n$ des réels. On note

$$x_1 \times x_2 \times x_3 \times \cdots \times x_n = \prod_{k=1}^{n} x_k.$$

Exemple 9. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} \frac{2k-1}{2k}$ à l'aide de la notation factorielle.

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{p} \frac{2k-1}{2k} &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \frac{2p-1}{2p} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{2}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{4} \times \cdots \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \frac{2p-2}{2p-2} \times \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p}{2p} \\
&= \frac{(2p)!}{2^{2p} \times 1 \times 1 \times 2 \times 2 \times \cdots \times (p-1) \times (p-1) \times p \times p} \\
&= \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}.
\end{aligned}$$

Remarque. Attention : il n'y a pas de linéarité du produit. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a par exemple,

$$\prod_{k=1}^{n} (\lambda u_k) = \lambda u_1 \times \lambda u_2 \times \cdots \times \lambda u_n = \lambda^n u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n.$$

Formule (Multiplication par un scalaire)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \ldots, u_n$ des réels,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \prod_{k=1}^{n} (\lambda u_k) = \lambda^n \prod_{k=1}^{n} u_k.$$