Ensemble des réels, suites usuelles

Cours de É. Bouchet – ECS1

4 octobre 2018

Table des matières

1 Ensemble des nombres réels

1.1 Théorème de la borne supérieure

Définition (Majorant, minorant).

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Un **majorant** (resp. **minorant**) de A est un élément M de $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in A, \quad x \leqslant M \text{ (resp. } x \geqslant M).$$

Définition (Maximum, minimum).

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que M est le **maximum** (resp. **minimum**) de A si $M \in A$ et

$$\forall x \in A, \quad x \leqslant M \text{ (resp. } x \geqslant M).$$

Remarque. Un ensemble A ne possède pas nécessairement de majorant ou minorant, et s'ils existent, il ne sont pas uniques. De même, A n'admet pas nécessairement de maximum ou minimum. Par contre, s'ils existent, ils sont uniques.

Exemple 1. $\mathbb{R}$ et $[0, +\infty[$ ne possèdent pas de majorants, ni de maximum. Par contre, $[0, 5]$ et $[0, 5[$ possèdent des majorants : 5, 6, 10, ou plus généralement tout réel $x \geqslant 5$. L'ensemble $[0, 5]$ possède également un maximum : 5, alors que $[0, 5[$ ne possède pas de maximum.

Théorème (Théorème de la borne supérieure).

Tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ non vide et majoré (resp. minoré) admet un plus petit majorant (resp. un plus grand minorant). Il est appelé **borne supérieure** de A (resp. **borne inférieure**) et noté $\sup A$ (resp. $\inf A$).

Remarque. Dans le cas où A est non vide et majoré,
- $\sup A$ n'est pas forcément un élément de A, à la différence de $\max A$ qui, **s'il existe**, est nécessairement un élément de A.
- si $\max A$ existe, alors $\max A = \sup A$.
- $\sup A$ est unique, il y a par contre une infinité de majorants.

Exemple 2. Soit $A = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^*\}$. Déterminer (s'ils existent) : la borne supérieure de A, le maximum de A, la borne inférieure de A, le minimum de A.

- A est non vide (il contient 1), est majoré par 1 et minoré par 0. Donc par le théorème de la borne supérieure, il admet une borne supérieure et une borne inférieure, à déterminer ultérieurement.
- $1 \in A$ (cas $n = 1$) et 1 majore A, donc 1 est à la fois le maximum et la borne supérieure de A.
- Supposons que A admet un minimum α. C'est un minorant de A, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \leqslant \frac{1}{n}$. Par passage à la limite, on trouve $\alpha \leqslant 0$. De plus, $\alpha \in A$, donc il existe un entier n_0 tel que $\alpha = \frac{1}{n_0} > 0$. Absurde. Donc A n'admet pas de minimum.
- Soit β la borne inférieure de A (dont on a déjà montré l'existence). C'est un minorant de A, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\beta \leqslant \frac{1}{n}$. Par passage à la limite, on trouve $\beta \leqslant 0$. De plus 0 est minorant de A et β est le plus grand des minorants : on en déduit $0 \leqslant \beta$. Donc $\beta = 0$ et 0 est la borne inférieure de A.

Définition (Intervalle)**.**

Soit I un ensemble de réels. On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ quand :

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad (x \leqslant z \leqslant y \Longrightarrow z \in I).$$

Exemple 3. $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $[0,5[$, $]3,18[$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}^*$ n'en est pas un car il ne contient pas 0.

Remarque. Si un intervalle non vide est borné, il contient alors tous les réels compris entre sa borne inférieure et sa borne supérieure.

1.2 Valeur absolue

Définition (Valeur absolue)**.**

Pour tout réel x, le maximum de l'ensemble $\{x, -x\}$ est la **valeur absolue** de x, notée $|x|$.

Pour manipuler des valeurs absolues, on cherchera le plus souvent à raisonner par séparation des cas.

Exemple 4.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $S = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} |i-j|$.

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{j} (j-i) + \sum_{i=j+1}^{n} (i-j) \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left(j \sum_{i=0}^{j} 1 - \sum_{i=0}^{j} i + \sum_{k=1}^{n-j} k \right) \text{ avec } k = i-j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left(j(j+1) - \frac{j(j+1)}{2} + \frac{(n-j)(n-j+1)}{2} \right) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \sum_{j=0}^{n} 1 - n \sum_{j=0}^{n} j + \sum_{j=0}^{n} j^2 \text{ en développant et par linéarité} \\
&= \frac{n(n+1)^2}{2} - n\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}
\end{aligned}$$

2. Calculer $I = \int_{-1}^{1} \exp(-|x|+1) dx$.

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{0} \exp(x+1) dx + \int_{0}^{1} \exp(-x+1) dx \\
&= [\exp(x+1)]_{-1}^{0} + [-\exp(-x+1)]_{0}^{1} \\
&= e - 1 + (-1) - (-e) \\
&= 2(e-1)
\end{aligned}$$

Proposition (Inégalité triangulaire)**.**

Pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

Démonstration. (démonstration à connaître) On montre le résultat dans le cas d'une somme de deux termes (le principe est le même pour une somme de n termes). On commence par élever $|x_1+x_2|$ et $|x_1|+|x_2|$ au carré pour les comparer :

$$\begin{aligned}(|x_1+x_2|)^2 - (|x_1|+|x_2|)^2 &= (x_1+x_2)^2 - |x_1|^2 - |x_2|^2 - 2|x_1||x_2| \\ &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2 - 2|x_1||x_2| \\ &= 2\left(x_1x_2 - |x_1x_2|\right) \\ &\leqslant 0\end{aligned}$$

D'où $(|x_1+x_2|)^2 \leqslant (|x_1|+|x_2|)^2$. En composant par la fonction racine carrée, qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on trouve l'inégalité désirée. $\square$

1.3 Partie entière

Définition (Partie entière)**.**

Pour tout réel x, il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$. L'entier n est appelé la **partie entière** de x, que l'on note $\lfloor x \rfloor$.

Démonstration. On admet l'existence (nécessite d'utiliser que $\mathbb{R}$ est archimédien, ce qui n'est pas au programme), montrons l'unicité. Supposons que n et n' sont deux entiers qui conviennent. On a $n \leqslant x < n'+1$, et donc $n \leqslant n'$. De même, $n' \leqslant n$, et donc $n = n'$. D'où l'unicité. $\square$

Remarque. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a donc $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Exemple 5. On a : $\lfloor 2,5 \rfloor = 2$, $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor -2,5 \rfloor = -3$, $\lfloor 0,8 \rfloor = 0$.

Proposition (Partie entière de la somme d'un réel et un entier)**.**

Soit $n \in \mathbb{Z}$, et $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor .$$

Démonstration. (démonstration à connaître) On cherche l'encadrement de $n+x$ par deux entiers successifs qui pourra permettre d'utiliser la définition. Par définition de $\lfloor x \rfloor$, $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. Donc en ajoutant n à tous les membres, $\lfloor x \rfloor + n \leqslant x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$, avec $\lfloor x \rfloor + n \in \mathbb{Z}$. Donc par définition de la partie entière de $n+x$, $\lfloor n+x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$. $\square$

Remarque. Attention : la plupart des autres opérations que l'on pourrait vouloir effectuer avec la partie entière sont fausses. On ne peut notamment pas sommer dans le cas général, ni multiplier par un scalaire.

Exemple 6. Chercher un contre-exemple qui montre que $\lfloor \lambda x \rfloor \neq \lambda \lfloor x \rfloor$.
En effet, $\left\lfloor 2\frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1$ alors que $2\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 2 \times 0 = 0$.

Exemple 7.

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer un encadrement de $\lfloor y \rfloor$ en fonction de y.
   On sait par définition que $\lfloor y \rfloor \leqslant y$ et $y < \lfloor y \rfloor + 1$. Donc $\lfloor y \rfloor \leqslant y$ et $y - 1 < \lfloor y \rfloor$, ce qui donne $y - 1 < \lfloor y \rfloor \leqslant y$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déduire de la question précédente la limite de la suite $\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on applique la question précédente à $y = nx$: $\frac{nx-1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant \frac{nx}{n}$. On a donc $x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x$, et la suite converge vers x par théorème d'encadrement.

2 Exemples de suites de réels

2.1 Suites arithmétiques

Définition récurrente en fonction de n : $u_{n+1} = u_n + r$.

Expression de u_n en fonction de n et d'un terme quelconque u_p : $u_n = u_p + (n-p)r$.

2.2 Suites géométriques

Définition récurrente en fonction de n : $u_{n+1} = u_n r$.

Expression de u_n en fonction de n et d'un terme quelconque u_p : $u_n = u_p r^{n-p}$.

2.3 Suites arithmético-géométriques

Définition (Suite arithmético-géométrique)**.**

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **arithmético-géométrique** lorsqu'il existe deux réels $a \neq 1$ et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

Proposition (Terme général d'une suite arithmético-géométrique)**.**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a \cdot u_n + b$. Alors, pour tous entiers n et p tels que $p \leqslant n$,

$$u_n = a^{n-p}(u_p - c) + c \text{ avec } c = \frac{b}{1-a}.$$

Démonstration. (démonstration à connaître) Soit p fixé. Le réel c est bien défini, car par hypothèse $a \neq 1$. On commence par montrer que la suite $(u_n - c)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a. Soit n un entier plus grand que p,

$$u_{n+1} - c = au_n + b - \frac{b}{1-a} = au_n + \frac{b - ab - b}{1-a} = au_n - a\frac{b}{1-a} = a(u_n - c).$$

Il suffit ensuite d'appliquer les formules pour les suites géométriques : pour tous entiers n et p tels que $p \leqslant n$,

$$u_n - c = a^{n-p}(u_p - c).$$

D'où le résultat. □

Remarque. Si on oublie la valeur de c, on peut la retrouver facilement en remarquant que c'est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $x = ax + b$.

Exemple 8. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -2u_n + 3$. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
En utilisant la formule précédente pour $p = 0$, on trouve : $\forall n \geqslant 0$,

$$u_n = (-2)^n \left(1 - \frac{3}{1+2}\right) + \frac{3}{1+2} = 1.$$

2.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition (Suite récurrente linéaire d'ordre 2)**.**

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **récurrente linéaire d'ordre 2** ou **récurrente linéaire double** lorsqu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Exemple 9. Soit $q \in \mathbb{R}$ et u la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n$. Pour quelles valeurs de q cette suite vérifie-t-elle la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$?

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n &\iff \forall n \in \mathbb{N}, q^{n+2} = aq^{n+1} + bq^n \\ &\iff \begin{cases} q^2 = aq + b & \text{si } q \neq 0 \\ b = 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Dans le premier cas, le résultat s'obtient en divisant les deux membres par $q^n \neq 0$. Le deuxième cas s'obtient avec la valeur particulière $n = 0$.

Définition (Équation caractéristique)**.**

Soit u une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Son **équation caractéristique** est :

$$q^2 = aq + b. \tag{E_c}$$

Théorème (Étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2)**.**

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique.

— Si $\Delta > 0$, (E_c) admet deux solutions distinctes réelles q_1 et q_2 et $\exists!(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n.$$

— Si $\Delta = 0$, (E_c) admet une unique solution réelle q et $\exists!(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\alpha n + \beta)q^n.$$

— Si $\Delta < 0$, (E_c) admet deux solutions complexes conjuguées z_1 et z_2. On pose $z_1 = \rho e^{i\theta}$, $\exists!(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \rho^n(\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta)).$$

Remarque. Les réels α et β sont déterminés à partir des conditions initiales.

Remarque. Dans le cas $\Delta < 0$, le choix de z_1 ou z_2 n'a pas d'importance : le résultat final sera le même après la prise en compte des conditions initiales.

Exemple 10. Soit u la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
On identifie une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $q^2 - q - 1 = 0$. On a alors $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$. L'équation a donc deux solutions réelles, $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Donc $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n.$$

Comme $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, on doit nécessairement avoir $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha q_1 + \beta q_2 = 1$. Donc en remplaçant, $\beta = -\alpha$ et $\alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1$, ce qui donne $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$