Séries

Cours de É. Bouchet – ECS1

16 mars 2020

Table des matières

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition (Série, somme partielle)**.**

Soit u une suite. On appelle **série** de terme général u_k, que l'on note $\sum u_k$, la suite (S_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

À n fixé, le terme S_n est appelé la **somme partielle** d'ordre n de la série.

Définition (Convergence d'une série, somme)**.**

Soit u une suite. On dit que la série $\sum u_k$ **converge** lorsque la suite (S_n) des sommes partielles converge. Sa limite est alors appelée **somme** de la série et on la note $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Remarque. Déterminer la nature d'une série, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente

Définition (Reste d'une série convergente)**.**

Soit u une suite telle que la série $\sum u_k$ converge. On appelle **reste** d'ordre n de la série la valeur :

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Remarque. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, le reste d'une série convergente converge toujours vers 0.

Exemple 1. Soit $q \in \mathbb{R}$, la série $\sum q^n$ est appelée *série géométrique* de raison q. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si} \quad q \neq 1 \\ n+1 & \text{si} \quad q = 1 \end{cases}.$$

Formule (Convergence d'une série géométrique)**.**

La série $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$, et on a alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Proposition.

Soit u et v deux suites qui ne diffèrent que par un nombre fini de termes. Alors les séries $\sum u_k$ et $\sum v_k$ sont de même nature.

1.2 Condition nécessaire de convergence

Proposition (Condition nécessaire de convergence d'une série, hors programme)**.**

Soit u une suite. Si la série $\sum u_n$ converge alors la suite (u_n) converge vers 0.

Démonstration. On suppose que la série $\sum u_n$ converge. Notons S_n ses sommes partielles et S sa somme. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $u_n = S_n - S_{n-1}$ et par passage à la limite (possible car la série converge), u converge vers $S - S = 0$. □

Remarque. Pour prouver qu'une série diverge, on peut utiliser la contraposée de ce résultat : il suffit de prouver que le terme général de la série ne converge pas vers 0.

Remarque. ATTENTION : Réciproque fausse !! On peut avoir (u_n) qui tend vers 0 sans que la série ne converge.

Exemple 2. Soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $|q| < 1$, étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{n} q^k}$.

Comme $|q| \neq 1$, la formule de somme des termes d'une suite géométrique donne $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1-q}{1-q^{n+1}}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 - q \neq 0$ et la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{n} q^k}$ ne converge pas.

Exemple 3. La série $\sum \dfrac{1}{n}$ est appelée **série harmonique**.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Calculer $S_{2n} - S_n$.
2. En minorant cette expression, montrer que la série diverge.
3. Soit $k \geqslant 2$. Montrer que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}dt$.
4. Donner un équivalent à S_n.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.
2. Par la question précédente,

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

   On raisonne par l'absurde : supposons que la série converge, on note alors S sa somme. Par unicité de la limite, on a $\lim S_n = \lim S_{2n} = S$ donc par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on trouve $0 \geqslant \frac{1}{2}$, ce qui est impossible. Donc la série harmonique diverge.

3. Soit $k \geqslant 2$, et $t \in [k, k+1]$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$. Comme cette fonction est de plus continue sur $[k, k+1]$ et comme $k \leqslant k+1$, la croissance de l'intégrale donne alors :
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt = \frac{1}{k}.$$
De même, soit $t \in [k-1, k]$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ ($k \geqslant 2$ donc $k-1>0$), $\frac{1}{t} \geqslant \frac{1}{k}$. La croissance de l'intégrale sur $[k-1, k]$ donne alors :
$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k} dt = \frac{1}{k}.$$
D'où l'inégalité demandée.
4. On somme de 2 à n l'inégalité de la question précédente (sommer directement de 1 à n est impossible car la question précédente nécessite $k \geqslant 2$). On obtient, par relation de Chasles :
$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t} dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^{n} \frac{1}{t} dt.$$
Ce qui donne après calculs :
$$\ln(n+1) - \ln(2) \leqslant S_n - 1 \leqslant \ln(n) - 0.$$
D'où $\forall n \geqslant 2$, $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} + \frac{1-\ln(2)}{\ln(n)} \leqslant \frac{S_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$. Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1$.
Par théorème d'encadrement, on trouve ainsi que $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln(n)} = 1$ et donc $S_n \sim \ln(n)$.

1.3 Opérations sur les séries convergentes

Proposition (Linéarité des séries convergentes)**.**

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes, et λ et μ deux réels. La série de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ est convergente et vérifie : $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de la somme (finie),
$$\sum_{k=0}^{n} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k + \mu \sum_{k=0}^{n} v_k.$$
Les hypothèses donnent la convergence du membre de droite, par combinaison linéaire de limites finies. Donc la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge, et le passage à la limite dans l'égalité précédente donne la relation sur les sommes des séries. □

Remarque. Attention : $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ peut converger sans que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne convergent. Dans ce cas, la formule précédente ne s'applique pas. Par exemple, $\sum(\frac{1}{n} - \frac{1}{n})$ est la série nulle, qui converge. Mais comme la série harmonique diverge, on n'a donc pas le droit d'utiliser la linéarité sur les sommes infinies.

Remarque. De manière générale, il faut être extrêmement méfiant quand on manipule des sommes infinies : de nombreux résultats qui sont évidents pour des sommes finies ne sont plus vérifiés pour les sommes de séries. Par exemple, la limite d'une somme infinie n'est pas toujours la somme infinie de la limite...

2 Quelques séries de référence

2.1 Séries géométriques dérivées

Proposition (Convergence des séries géométriques dérivées une et deux fois)**.**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Les séries $\sum kx^{k-1}$ et $\sum k(k-1)x^{k-2}$ convergent si et seulement si $|x| < 1$, et on a alors :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ et } \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Démonstration. (démonstration à connaître) On montre le résultat pour la série géométrique dérivée une fois (l'autre se montre de même en dérivant une fois de plus). On commence par remarquer que si $|x| \geqslant 1$, les termes généraux ne convergent pas vers 0, donc les séries divergent. Il ne reste donc que le cas de la convergence à traiter.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose f_n la fonction définie pour tout $x \in]-1;1[$ par $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. La fonction f_n est dérivable sur $]-1,1[$, on peut donc la dériver (sous les deux formes) :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = f_n'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x)-(-1)(1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}.$$

Comme $|x| < 1$, les croissances comparées donnent que $\lim_{n\to+\infty} nx^{n+1} = 0$ ainsi que $\lim_{n\to+\infty} (n+1)x^n = 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, ce qui signifie que la série $\sum kx^{k-1}$ converge et que $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. □

Remarque. Attention : le résultat « la dérivée de la somme est la somme des dérivées » n'est vrai que pour le cas de sommes FINIES. On ne peut jamais dériver directement une somme infinie : il faut se ramener à dériver les sommes partielles, puis passer à la limite.

2.2 Séries télescopiques

Définition (Séries télescopiques)**.**

Soit u une suite. La série de terme général $u_{k+1} - u_k$ est appelée **série télescopique**.

Proposition (Convergence des séries télescopiques)**.**

Soit u une suite. La suite (u_k) et la série $\sum (u_{k+1} - u_k)$ ont même nature en terme de convergence.

Démonstration. En utilisant le résultat sur les sommes télescopiques, on montre que pour tout entier n,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

Si u_n converge vers un réel l, S_n converge alors vers $\ell - u_0$. Réciproquement, si S_n converge vers un réel ℓ', u_n converge alors vers $\ell' + u_0$. On montre de même que les deux suites divergent simultanément vers $+\infty$ ou $-\infty$. D'où le résultat.

□

Exemple 4. Étudier la convergence de la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ et déterminer sa somme si elle converge.
On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, d'où par calcul de somme télescopique, $\forall N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

Or $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N+1} = 0$, donc la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - 0 = 1$.

2.3 Séries exponentielles

Proposition (Convergence de la série exponentielle).

Soit $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{x^k}{k!}$ converge et vérifie : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

Démonstration. On sait que $\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\exp)^{(n)} = \exp$. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors pour tout t entre 0 et x, $\left|\exp^{(n+1)}(t)\right| \leqslant M = \max(e^x, 1)$ (on le montre par croissance de l'exponentielle en séparant les cas $x \geqslant 0$ et $x \leqslant 0$). On peut donc appliquer l'inégalité de Taylor Lagrange à l'ordre n entre 0 et x :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-0)^k}{k!} e^0 \right| \leqslant \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!} M.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} M = 0$ par croissances comparées. Donc par théorème d'encadrement la série $\sum \frac{x^k}{k!}$ converge et sa somme vaut e^x. □

3 Séries à termes positifs

3.1 Critères de convergence

Proposition (Condition nécessaire et suffisante de convergence).

Soit (u_n) une suite à termes positifs. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (S_n) est majorée.

Démonstration. On considère la suite (S_n). $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$ donc cette suite est croissante.
- Supposons que la suite (S_n) est majorée, comme elle est aussi croissante elle converge, et la série converge.
- Réciproquement, si la série converge, comme la suite (S_n) est croissante, elle reste toujours plus petite que sa limite. Elle est donc majorée par la somme de la série.

□

Proposition (Convergence par comparaison).

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs, telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.
- Si la série de terme général v_n converge alors la série de terme général u_n converge.
- Si la série de terme général u_n diverge vers $+\infty$ alors la série de terme général v_n diverge vers $+\infty$.

Remarque. Attention ! Dans le cas convergent, ce résultat ne signifie pas nécessairement que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$: les premiers termes peuvent modifier significativement les valeurs des sommes.

Démonstration. (démonstration à connaître) On note n_0 le rang à partir duquel $u_n \leqslant v_n$.

— On suppose que $\sum v_n$ converge. Soit $n \geqslant n_0$, comme les suites sont à termes positifs, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n_0} u_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=0}^{n_0} u_k + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} v_k.$$

Les sommes partielles de la série $\sum u_n$ sont donc majorées. Comme la série est à termes positifs, c'est donc qu'elle converge par le résultat précédent.

— On suppose que $\sum u_n$ diverge (vers $+\infty$ comme elle est à termes positifs). Soit $n \geqslant n_0$,

$$\sum_{k=0}^{n} v_k \geqslant \sum_{k=0}^{n_0} v_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \mapsto_{n\to+\infty} +\infty.$$

Donc par théorème de comparaison, la suite des sommes partielles diverge vers $+\infty$. Donc la série $\sum v_n$ diverge.

□

Proposition (Convergence par équivalences)**.**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature en terme de convergence.

Remarque. ATTENTION : cela ne signifie pas que les suites des sommes partielles sont équivalentes, puisqu'on n'a pas le droit de sommer des équivalents.

Proposition (Convergence par négligeabilité)**.**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs qui vérifient : $u_n = o(v_n)$. Si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge également.

Remarque. Il est impossible de montrer la divergence d'une série par un critère de négligeabilité.

3.2 Séries de Riemann

Proposition (Convergence de la série de Riemann)**.**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est appelée **série de Riemann** et converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. (démonstration à connaître) On fait une disjonction de cas en fonction de la valeur de α

1. Si $\alpha = 1$, c'est la série harmonique, dont on a déjà montré qu'elle diverge.
2. Si $\alpha < 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^\alpha} \geqslant \frac{1}{n} \geqslant 0$. Par critère de comparaison des séries à termes positifs, puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ également.

3. Si $\alpha > 1$, on effectue une comparaison avec une intégrale. La fonction f définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc pour tout $k \geqslant 2$ (garantit que $[k-1, k] \subset \mathbb{R}_+^*$), la croissance de l'intégrale donne :
$$\frac{1}{k^\alpha} = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha} dt \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha} dt.$$
Soit $n \geqslant 2$. En sommant sur $k \in [\![2, n]\!]$, la relation de Chasles donne $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt$. Et donc
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt = 1 + \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n = 1 + \frac{1 - n^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$
Ainsi $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est une série à termes positifs dont la suite des sommes partielles est majorée. C'est donc une série convergente.

□

Exemple 5. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \exp(-\sqrt{n})$.
Par croissances comparées, on a $\lim_{n\to\infty} n^2 \exp(-\sqrt{n}) = 0$. Donc $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or $\frac{1}{n^2} \geqslant 0$ est le terme général d'une série de Riemann convergente ($2 > 1$). Donc par critère de comparaison des séries de terme général positif, $\sum u_n$ converge.

4 Convergence absolue

4.1 Définition et théorème fondamental

Définition (Série absolument convergente)**.**

Soit u une suite. On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** lorsque la série $\sum |u_n|$ converge.

Théorème (Convergence des séries absolument convergentes)**.**

Toute série absolument convergente est convergente.

Remarque. ATTENTION : La réciproque est fausse.

Démonstration. Soit $\sum u_k$ une série absolument convergente, et $k \in \mathbb{N}$:
$$u_k = \frac{2u_k + |u_k| - |u_k|}{2} = \frac{u_k + |u_k| + u_k - |u_k|}{2} = \max(u_k, 0) - \max(-u_k, 0).$$
(On rappelle qu'on a vu en septembre dans les travaux de rentrée que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\max(x, y) = \dfrac{x + y + |x - y|}{2}$). Les deux séries $\sum \max(u_k, 0)$ et $\sum \max(-u_k, 0)$ sont des séries dont les termes généraux sont positifs et majorés par $|u_n|$. Or $\sum |u_n|$ converge. Donc par comparaison de séries positives convergentes, elles convergent également.
Ainsi, $\sum u_n$ peut s'écrire comme différence de deux séries convergentes. C'est donc une série convergente. □

Remarque. Toute série absolument convergente est donc la différence de deux séries à termes positifs convergentes. En effet, on a montré :
$$\sum u_k = \sum \max(u_k, 0) - \sum \max(-u_k, 0).$$

Exemple 6. Étudier la série de terme général $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n^2}$.
On remarque que : pour tout $n \geqslant 1$,

$$|u_n| = \left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente et comme les séries sont à termes positifs, le critère de comparaison donne la convergence de $\sum |u_n|$. Donc $\sum u_n$ converge absolument, et donc converge.

4.2 Séries alternées

Proposition (Séries alternées, hors programme)**.**

Soit u une suite décroissante, à termes positifs et qui converge vers 0. Alors la série de terme général $(-1)^n u_n$ est convergente.

Démonstration. On note S_n la somme partielle d'ordre n de la série. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- $S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+2}u_{2n+2} + (-1)^{2n+1}u_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0$, donc la suite (S_{2n}) est décroissante.
- $S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+3}u_{2n+3} + (-1)^{2n+2}u_{2n+2} = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geqslant 0$, donc la suite (S_{2n+1}) est croissante.
- $S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1}$ converge vers 0.

Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont donc adjacentes, et par théorème de convergence, elles convergent toutes les deux vers une même limite S.
Soit I un intervalle ouvert contenant S. Par définition de la limite d'une suite, il contient donc tous les termes des suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sauf un nombre fini. Il contient donc tous les termes de la suite (S_n) sauf un nombre fini. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ et la série converge (vers S). □

Exemple 7. La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ ne converge pas absolument, mais elle est quand même convergente.
$\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$ est le terme général de la série harmonique, divergente. Donc $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ ne converge pas absolument.
Il s'agit cependant d'une série alternée : la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$ est décroissante, à termes positifs et converge vers 0. La série converge donc.