Sommes et produits

Cours de É. Bouchet – PCSI

19 septembre 2022

Table des matières

1 Sommes

1.1 Généralités

Définition 1.1 (Somme)

Soit $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p \leqslant n$ et u une suite de réels, on note $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \sum_{i=p}^{n} u_i$.

Remarque. La somme $\sum_{i=p}^{n} u_i$ contient $n-p+1$ termes.

Remarque. Dans le cas où $p > n$, on pose $\sum_{i=p}^{n} u_i = 0$ par convention.

Définition 1.2 (Indice, bornes)

Dans la somme $\sum_{i=p}^{n} u_i$, i s'appelle **l'indice**, p et n sont **les bornes** de la somme.

Remarque. L'indice d'une somme est dit muet, ce qui signifie que l'on peut écrire : $\sum_{i=p}^{n} u_i = \sum_{j=p}^{n} u_j$.

Remarque. On peut aussi noter $\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} u_k$ ou $\sum_{k \in A} u_k$ avec A un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$. On a par exemple :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} u_k = \sum_{k \in [\![0,n]\!]} u_k.$$

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, simplifier les écritures suivantes : $\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n \text{ termes}}$, puis $\underbrace{a+a+a+\ldots+a}_{n \text{ termes}}$, puis $2+4+6+\ldots+2n$, puis $1+3+5+\ldots+(2n+1)$, puis $1+3+5+\ldots+2013$.

<u>Solution :</u>

$$\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n \text{ termes}} = \sum_{i=1}^{n} 1, \quad \underbrace{a+a+a+\ldots+a}_{n \text{ termes}} = \sum_{i=1}^{n} a, \quad 2+4+6+\ldots+2n = \sum_{i=1}^{n} 2i,$$

$$1+3+5+\ldots+(2n+1) = \sum_{i=0}^{n} (2i+1), \quad 1+3+5+\ldots+2013 = \sum_{i=0}^{1006} (2i+1).$$

Remarque. On déduit entre autres de ces écritures que $\forall (p,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \geqslant p$, $\sum_{k=p}^{n} 1 = n-p+1$.

1.2 Premiers calculs de sommes

Proposition 1.3 (Somme des premiers entiers)

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P(n)$: « $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

— $\sum_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0 \times 1}{2}$ et $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0 = \frac{0 \times 1 \times 1}{6}$ donc $P(0)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel fixé. Supposons que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

De plus,

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1\right).$$

Or $\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1 = \frac{2n^2+7n+6}{6} = \frac{(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

On a donc montré le résultat annoncé. □

Remarque. Ces formules restent vraies en faisant partir les sommes de 1, puisque les termes en 0 sont nuls.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{2n} k^2$.

Solution : $\sum_{k=0}^{2n} k^2 = \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} = \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}$.

Exercice 3. Calculer $\sum_{k=2}^{11} k^2$.

Solution : $\sum_{k=2}^{11} k^2 = \sum_{k=1}^{11} k^2 - 1^2 = \frac{11 \times 12 \times 23}{6} - 1 = 11 \times 2 \times 23 - 1 = 506 + 1 = 505$.

Proposition 1.4 (Linéarité de la somme)

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ et x, y des suites de réels. Alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=p}^{n} (x_k + \lambda y_k) = \sum_{k=p}^{n} x_k + \lambda \sum_{k=p}^{n} y_k$.

Démonstration. Si $n < p$, les sommes sont nulles donc égales. Sinon, il suffit de se ramener à l'écriture avec des points de suspension :

$$\sum_{k=p}^{n} (x_k + \lambda y_k) = x_p + \lambda y_p + x_{p+1} + \lambda y_{p+1} + \ldots + x_n + \lambda y_n = x_p + x_{p+1} + \ldots + x_n + \lambda y_p + \lambda y_{p+1} + \ldots + \lambda y_n = \sum_{k=p}^{n} x_k + \lambda \sum_{k=0}^{n} y_k.$$

□

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k(k-2)$.

Solution : Par linéarité, $\sum_{k=0}^{n} k(k-2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 - 2\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n-5)}{6}$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$, déterminer la valeur de $\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} ki\right)$.

Solution : Par linéarité, $\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} ki\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(i \sum_{k=1}^{n} k\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(i \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^{m} i = \frac{n(n+1)m(m+1)}{4}$.

1.3 Changements d'indices et regroupements de termes

Proposition 1.5 (Changements d'indices)

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, u une suite de réels et $k \in \mathbb{Z}$.

- En posant $j = i+k$, on effectue un **changement d'indice par translation** : $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} u_{i+k} = \sum_{j=p+k}^{n+k} u_j$.
- En posant $j = k-i$, on effectue un **changement d'indice par retournement** : $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} u_{k-i} = \sum_{j=k-n}^{k-p} u_j$.

Remarque. ATTENTION : il est interdit de « sauter » des indices, par exemple de ne prendre que les termes pairs, ou de poser $k = 2i$. Pour faire un changement d'indices, il faut des entiers *consécutifs* et le *même nombre de termes* dans les deux sommes.

Démonstration. Si $n < p$, les sommes sont nulles donc égales.

Sinon, on a d'une part : $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} u_{i+k} = u_{p+k} + u_{p+1+k} + \ldots + u_{n+k} = \sum_{j=p+k}^{n+k} u_j$, et d'autre part :

$$\sum_{i=p}^{n} u_{k-i} = u_{k-p} + u_{k-p-1} + \ldots + u_{k-n} = u_{k-n} + \ldots + u_{k-p-1} + u_{k-p} = \sum_{j=k-n}^{k-p} u_j.$$

□

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k-1)^2$.

Solution : Poser $j = k-1$ donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 = \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \frac{(n-1)n(2n-2+1)}{6} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (n-i)^2$.

Solution : Poser $j = n-i$ donne $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (n-i)^2 = \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.

Proposition 1.6 (Regroupements des indices pairs et impairs)

Soit $n \in \mathbb{N}$, et u une suite de réels, $\displaystyle\sum_{p=0}^{2n} u_p = \sum_{p=0}^{n} u_{2p} + \sum_{p=0}^{n-1} u_{2p+1}$.

Démonstration.

$$\sum_{p=0}^{2n} u_p = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{2n-1} + u_{2n} = (u_0 + u_2 + \ldots + u_{2n}) + (u_1 + u_3 + \ldots + u_{2n-1}) = \sum_{p=0}^{n} u_{2p} + \sum_{p=0}^{n-1} u_{2p+1}.$$

□

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}$, Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} k(-1)^k$.

Solution : Regrouper les indices pairs et impairs donne :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 2k(-1)^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)(-1)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} 2k - \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n} k - 2\sum_{k=0}^{n-1} k - \sum_{k=0}^{n-1} 1,$$

d'où $S_n = 2\frac{n(n+1)}{2} - 2\frac{n(n-1)}{2} - n = n\left((n+1) - (n-1) - 1\right) = n$.

1.4 Télescopages

Proposition 1.7 (Somme télescopique)

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Pour tous entiers $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ avec $p\leqslant n$, on a $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_{n+1}-u_p$.

Démonstration. On développe par linéarité, puis simplifie grâce à un changement d'indice :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n}(u_{k+1}-u_k) &= \sum_{k=p}^{n}u_{k+1}-\sum_{k=p}^{n}u_k\\ &= \sum_{i=p+1}^{n+1}u_i-\sum_{k=p}^{n}u_k \quad \text{en posant } i=k+1\\ &= u_{n+1}+\sum_{i=p+1}^{n}u_i-u_p-\sum_{k=p+1}^{n}u_k\\ \sum_{k=p}^{n}(u_{k+1}-u_k) &= u_{n+1}-u_p\end{aligned}$$

$\square$

Exercice 9. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

Solution : On procède par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)-k}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{k+1}-\left(-\frac{1}{k}\right)\right)=1-\frac{1}{n+1},\ \text{en posant } u_k=-\frac{1}{k}.$$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k))=\ln(n+1)-\ln(1)=\ln(n+1),\ \text{en posant } u_k=\ln(k).$$

1.5 Sommes et puissances

Proposition 1.8 (Somme des termes d'une suite géométrique)

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $q\in\mathbb{R}$. Si $q=1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}q^k=n+1$, sinon $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Démonstration. Soit $q\in\mathbb{R}$, si $q=1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}q^k=\sum_{k=0}^{n}1=n+1$ car la somme contient $n+1$ termes.
Si $q\neq 1$, on trouve par télescopage :

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n}q^k=\sum_{k=0}^{n}(q^k-q^{k+1})=-q^{n+1}-(-1)=1-q^{n+1}.$$

En divisant par $1-q\neq 0$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. $\square$

Remarque. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$ Soit $q \neq 1$. On peut montrer de même que :

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q} = q^p \frac{1-q^{n+1-p}}{1-q}.$$

Ce résultat se retrouve par changement d'indice en posant $j = k-p$: $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} q^k = \sum_{j=0}^{n-p} q^{j+p} = q^p \sum_{j=0}^{n-p} q^j = q^p \frac{1-q^{n+1-p}}{1-q}$.

Proposition 1.9 (Identité remarquable)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors $a^n - b^n = (a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$.

Démonstration. On procède par linéarité puis télescopage :

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(a^{n-k} b^k - a^{n-(1+k)} b^{k+1}\right) = a^{n-0} b^0 - a^{n-(1+n-1)} b^{n-1+1} = a^n - b^n.$$

□

Remarque. Contrairement aux précédentes, cette formule est davantage utilisée pour factoriser que pour développer.

Exemple 10. On a $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, ainsi que $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2 b + a b^2 + b^3)$.

1.6 Sommes doubles

Lorsqu'on a une somme double où les indices des deux sommes ne dépendent pas l'un de l'autre, on peut intervertir les sommes, et donc sommer dans l'ordre qu'on préfère (c'est le cas notamment de la somme de l'exercice 5). Ce n'est pas le cas si les indices dépendent l'un de l'autre.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i$.

Solution : On commence par chercher l'expression la plus simple : $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} i = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} i$

(ces formules s'obtiennent par exemple en dessinant un triangle où i est en abscisse et j en ordonnée).
Ici, la deuxième expression permet de se ramener facilement aux formules de cours :

$$\begin{aligned}
\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i &= \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j} i\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{j(j+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} j \\
&= \frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{1}{4} n(n+1)\left(\frac{2n+1}{3} + 1\right) \\
&= \frac{1}{12} n(n+1)(2n+4) \\
\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij &= \frac{1}{6} n(n+1)(n+2).
\end{aligned}$$

Proposition 1.10 (Produit de sommes)

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ $a_0,\dots,a_n$ et $b_0,\dots,b_p$ des réels, alors $\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right)\left(\sum_{i=0}^{p} b_i\right) = \sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\0\leqslant i\leqslant p}} a_j b_i$.

Démonstration. Il suffit de développer :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right)\left(\sum_{i=0}^{p} b_i\right) &= a_0\left(\sum_{i=0}^{p} b_i\right) + a_1\left(\sum_{i=0}^{p} b_i\right) + \dots + a_n\left(\sum_{i=0}^{p} b_i\right)\\ &= a_0b_0 + a_0b_1 + \dots + a_0b_p + a_1b_0 + a_1b_1 + \dots + a_1b_p + \dots + a_nb_0 + a_nb_1 + \dots + a_nb_p\\ &= \sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\0\leqslant i\leqslant p}} a_j b_i.\end{aligned}$$

□

Remarque. En particulier, $\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right)^2 = \sum_{j=0}^{n} a_j^2 + 2\sum_{0\leqslant j<i\leqslant n} a_j a_i$. En effet,

$$\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right)^2 = \sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\0\leqslant i\leqslant n}} a_j a_i = \sum_{j=0}^{n} a_j^2 + \sum_{0\leqslant j<i\leqslant n} a_j a_i + \sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} a_j a_i = \sum_{j=0}^{n} a_j^2 + 2\sum_{0\leqslant j<i\leqslant n} a_j a_i.$$

Exemple 12. Cette formule permet de développer facilement des expressions usuelles. Par exemple,

$$(a_1+a_2+a_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3.$$

2 Produits

2.1 Généralités

Définition 2.1 (Produit)

Soit $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p \leqslant n$ et u une suite de réels, on note $u_p \times u_{p+1} \times \dots \times u_n = \prod_{i=p}^{n} u_i$.

Remarque. Dans le cas où $p > n$, on pose $\prod_{i=p}^{n} u_i = 1$ par convention.

Remarque. Comme dans le cas des sommes, il est possible d'effectuer des changements d'indice sur des produits. On retrouve également le nombre de termes : le produit $\prod_{i=p}^{n} u_i$ contient $n-p+1$ termes.

Proposition 2.2 (Produit télescopique)

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls. Pour tous entiers $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leqslant n$, on a $\prod_{k=p}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_p}$.

Démonstration. On développe puis simplifie grâce au changement d'indice $i = k+1$:

$$\prod_{k=p}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\displaystyle\prod_{k=p}^{n} u_{k+1}}{\displaystyle\prod_{k=p}^{n} u_k} = \frac{\displaystyle\prod_{i=p+1}^{n+1} u_i}{\displaystyle\prod_{k=p}^{n} u_k} = \frac{u_{n+1} \times \displaystyle\prod_{i=p+1}^{n} u_i}{u_p \times \displaystyle\prod_{k=p+1}^{n} u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_p}.$$

□

Remarque. Attention : il n'y a pas de linéarité du produit.

Proposition 2.3 (Multiplication par une constante)

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leqslant n$ et $u_p, \ldots, u_n$ des réels,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \prod_{k=p}^{n} (\lambda u_k) = \lambda^{n-p+1} \prod_{k=p}^{n} u_k.$$

Démonstration. On trouve par calcul $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} (\lambda u_k) = \lambda u_p \times \lambda u_{p+1} \times \cdots \times \lambda u_n = \lambda^{n-p+1} \times u_p \times u_{p+1} \times \cdots \times u_n$. □

2.2 Factorielle

Définition 2.4 (Factorielle)

Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle **factorielle** n la quantité : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$.

Exemple 13. $0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120.$

Remarque. Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n!}{n} = (n-1)!$.
Toute autre formule pour simplifier des notations factorielles est fausse, on ne peut notamment pas simplifier $(2n)!$

Exercice 14. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} \frac{2k-1}{2k}$ à l'aide de la notation factorielle.

<u>Solution :</u>

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{p} \frac{2k-1}{2k} &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \frac{2p-1}{2p} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{2}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{4} \times \cdots \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \frac{2p-2}{2p-2} \times \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p}{2p} \\
&= \frac{(2p)!}{2^{2p} \times 1 \times 1 \times 2 \times 2 \times \cdots \times (p-1) \times (p-1) \times p \times p} \\
\prod_{k=1}^{p} \frac{2k-1}{2k} &= \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}.
\end{aligned}$$

3 Coefficient binomiaux

3.1 Premiers calculs

Définition 3.1 (Coefficient binomiaux)

Soit $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$.

— Si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0,n]\!]$ on pose $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$.

— Si $n < 0$ ou $p \notin [\![0,n]\!]$ on pose $\binom{n}{p} = 0$.

Remarque. En particulier, si $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!0!} = 1$. Si de plus $n \neq 0$, $\binom{n}{1} = \frac{n}{1} = n$.

Exercice 15. Calculer $\binom{8}{4}$.

Solution : Un calcul direct donne $\binom{8}{4} = \frac{8\times7\times6\times5}{1\times2\times3\times4} = 70$.

Proposition 3.2 (Formule de Pascal)

$\forall (n,p) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.

Démonstration. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1,n-1]\!]$, on a aussi $p-1 \in [\![0,n-1]\!]$ et :

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} &= \frac{(n-1)!}{p!\,(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,((n-1)-(p-1))!} \\
&= \frac{(n-1)!}{p!\,(n-1-p)!}\left(1 + \frac{p}{n-p}\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{p!\,(n-1-p)!}\left(\frac{n}{n-p}\right) \\
\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} &= \binom{n}{p}
\end{aligned}$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p = 0$, $\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{-1} = \binom{n-1}{0} + 0 = 1 = \binom{n}{0}$. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p = n$, $\binom{n-1}{n} + \binom{n-1}{n-1} = 0 + 1 = 1 = \binom{n}{n}$.
Dans tous les autres cas, les deux membres de la formule sont nuls dont égaux.
La formule est donc vraie pour tout couple d'entiers différent de $(0,0)$. □

Remarque. Le tableau suivant, appelé triangle de Pascal, permet de retrouver facilement les petits coefficients binomiaux :

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	0
5	1	5	10	10	5	1

3.2 Propriétés et formules

Proposition 3.3 (Symétrie)

$\forall (n,p) \in \mathbb{Z}^2$, on a $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Exemple 16. $\binom{8}{2} = \binom{8}{8-2} = \binom{8}{6}$.

Démonstration. Si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$, alors $n - p \in [\![0, n]\!]$, et la définition donne : $\displaystyle\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$. Sinon, les deux termes sont nuls. Dans tous les cas, il y a donc égalité. □

Proposition 3.4 (Formule "sans nom")

Soit $n \in \mathbb{Z}$. $\forall p \in \mathbb{Z}^*$, $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.

Démonstration. Si $n \geqslant 1$ et $p \in [\![1, n]\!]$ (sinon, les termes sont nuls donc égaux), on a :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n}{p}\frac{(n-1)!}{(p-1)!\,((n-1)-(p-1))!} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1},$$

où la dernière égalité est valide car on a bien $p - 1 \in [\![0, n-1]\!]$. □

Proposition 3.5 (Formule du binôme de Newton)

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : \displaystyle(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

— $(a+b)^0 = 1$, et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$ donc $P(0)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} && \text{par } P(n)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}\\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-i+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} && \text{en posant } i = k+1\\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n-k+1} && \text{en séparant } i = 0 \text{ et } k = n+1\\
(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} && \text{par la formule de Pascal}
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Cela montre le résultat annoncé. □

Exercice 17. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $(1+x)^4$.
Solution : La formule du binôme de Newton donne :

$$(1+x)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3 + \binom{4}{2}x^2 + \binom{4}{3}x + \binom{4}{4}x^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1.$$

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Solution : La formule du binôme de Newton donne $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

Solution : On sait que pour tout entier k non nul, $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$. Donc

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = 0 + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = n2^{n-1},$$

où on a posé $i = k-1$ puis utilisé la formule du binôme de Newton.