Systèmes linéaires

Cours de É. Bouchet – ECS1

14 janvier 2021

Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Système linéaire

1.1 Définitions

Définition (Équation linéaire)**.**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une **équation linéaire** à p inconnues x_1, x_2, ..., x_p est une équation pouvant s'écrire sous la forme

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_p x_p = \beta,$$

où α_1, α_2, ..., α_p et β sont $p+1$ scalaires, éléments de $\mathbb{K}$.
Un p-uplet $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est **solution de cette équation linéaire** si l'égalité

$$\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_p c_p = \beta$$

est vérifiée.

Définition (Système linéaire)**.**

Soit p et n deux entiers naturels non nuls. On appelle **système linéaire** de n équations à p inconnues x_1, x_2, ..., x_p tout système $(\mathcal{S})$ pouvant s'écrire sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

où $(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ et $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont des scalaires fixés éléments de $\mathbb{K}$.
La i-ième équation du système $(\mathcal{S})$ qui s'écrit

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ip}x_p = b_i$$

avec $i \in [\![1, n]\!]$ est appelée **i-ième ligne du système** $(\mathcal{S})$ et notée L_i.

Définition (Solution d'un système linéaire)**.**

Un p-uplet de scalaires $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$ est **solution du système** $(\mathcal{S})$ s'il est solution, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, de l'équation L_i du système $(\mathcal{S})$.

— **Résoudre** le système $(\mathcal{S})$ c'est déterminer l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$.
— Un système n'ayant aucune solution est dit **impossible**.
— Un système est dit **compatible** s'il existe au moins un p-uplet $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$ solution.
— Deux systèmes sont **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.

Définition (Système homogène).

On appelle **système homogène** un système dont tous les seconds membres sont nuls :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad b_i = 0.$$

On appelle **système homogène associé** à un système $(\mathcal{S})$ le système homogène $(\mathcal{S}_0)$ obtenu en prenant dans $(\mathcal{S})$ tous les seconds membres b_i égaux à 0.

Exemple 1. On considère le système linéaire $\left\{\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & = & 5 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & = & 0 \end{array}\right.$. Son système homogène associé est : $\left\{\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & = & 0 \end{array}\right.$.

Remarque. Un système homogène a toujours au moins une solution : $x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0$.

1.2 Écriture matricielle d'un système linéaire

Définition (Matrice associée).

La matrice $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la **matrice associée** au système $(\mathcal{S})$.

Si l'on pose $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, résoudre le système $(\mathcal{S})$ revient à chercher l'ensemble des vecteurs colonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ tels que $AX = B$.

Exemple 2. On considère le système linéaire $\left\{\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & = & 5 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & = & 0 \end{array}\right.$. Sa matrice associée est $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et résoudre le système revient à chercher les réels x_1, x_2 tels que $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Remarque. Si la matrice A est inversible, le système $(\mathcal{S})$ possède un unique p-uplet solution obtenu via $X = A^{-1}B$.

2 Système de Cramer

2.1 Définition

Définition (Système de Cramer).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle système de Cramer tout système linéaire $(\mathcal{S})$ de n équations à n inconnues dont la matrice associée est inversible.

Remarque. Cette définition est indépendante du second membre de $(\mathcal{S})$.

Proposition (Solution d'un système de Cramer).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $(\mathcal{S})$ un système de n équations à n inconnues. $(\mathcal{S})$ est un système de Cramer si et seulement si il admet un unique n-uplet solution.

2.2 Système de deux équations à deux inconnues

Dans $\mathbb{K}^2$, le système $\left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & c \\ a'x & + & b'y & = & c' \end{array}\right.$ d'inconnues (x, y) est de Cramer ssi $ab' - a'b \neq 0$ (quand la matrice associée est inversible).

On a alors :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} = \frac{1}{ab' - ba'} \cdot \begin{pmatrix} b' & -b \\ -a' & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$$

L'unique solution est donc :

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b} \quad \text{et} \quad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

2.3 Exemples

Les systèmes suivants sont-ils de Cramer ?

$$(\mathcal{S}_1) \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & + & z & - & t & = & 1 \\ 2x & - & 4y & - & z & - & 3t & = & 3 \\ 5x & - & 10y & - & z & - & 7t & = & 5 \\ x & - & 2y & + & 4z & & & = & 0 \end{array}\right.$$

La matrice associée au système est :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \\ 5 & -10 & -1 & -7 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

On utilise les opérations du pivot de Gauss pour inverser la matrice :

$$L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1, \quad L_3 \longleftarrow L_3 - 5L_1, \quad L_4 \longleftarrow L_4 - L_1$$

produisent la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

La réduite de Gauss, quelle qu'elle soit, aura donc au minimum un zéro sur la diagonale (dans la deuxième colonne), la matrice n'est donc pas inversible. Cela signifie que le système n'est pas de Cramer.

$$(\mathcal{S}_2) \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & \frac{1}{2}y & + & \frac{1}{3}z & + & \frac{1}{4}t & = & 1 \\ & & \frac{1}{2}y & + & \frac{1}{3}z & + & \frac{1}{4}t & = & 3 \\ & & & & \frac{1}{3}z & + & \frac{1}{4}t & = & 7 \\ & & & & & & \frac{1}{4}t & = & -1 \end{array}\right.$$

La matrice associée au système est :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Elle est inversible car triangulaire sans 0 sur la diagonale. Donc $(\mathcal{S}_2)$ est un système de Cramer.

3 Résolution par la méthode du Pivot de Gauss

3.1 Rappels : opérations élémentaires sur les lignes

On appelle opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire $(\mathcal{S})$ une opération de l'un des trois types suivants :

1. échange de deux lignes L_i et L_j avec $i \neq j$, codifiée : $L_i \longleftrightarrow L_j$.
2. multiplication de la ligne L_i par un scalaire non nul α, codifiée : $L_i \longleftarrow \alpha L_i$.
3. addition de la ligne L_i et d'un multiple de L_j avec $i \neq j$, codifiée : $L_i \longleftarrow L_i + \beta L_j$.

On obtient un système linéaire équivalent à $(\mathcal{S})$ en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de $(\mathcal{S})$.

3.2 Principe de la méthode

En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire $(\mathcal{S})$, on transforme le système linéaire $(\mathcal{S})$ en un système linéaire $(\mathcal{S}')$ qui lui est équivalent et qui est échelonné, c'est-à-dire de la forme (si $r \leqslant n$ et $r \leqslant p$) :

$$(\mathcal{S}') \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1r}x_r & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2r}x_r & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ & & & & & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & a_{rr}x_r & + & \dots & + & a_{rp}x_p & = & b_r \\ & & & & & & & & & & 0 & = & b_{r+1} \\ & & & & & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & & & & 0 & = & b_n \end{array} \right. .$$

Pour que $(\mathcal{S}')$ soit compatible, il faut que les $n-r$ dernières équations soient vérifiées. Les inconnues x_{r+1}, …, x_p peuvent prendre des valeurs arbitraires. Une fois fixées elles déterminent de manière unique les valeurs de x_1, x_2, …, x_r.

3.3 Exemples

Résoudre les systèmes suivants par la méthode du Pivot de Gauss :

1. $(\mathcal{S}_1) \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & + & z & - & t & = & 1 \\ 2x & - & 4y & - & z & - & 3t & = & 3 \\ 5x & - & 10y & - & z & - & 7t & = & 5 \\ x & - & 2y & + & 4z & & & = & 0 \end{array} \right.$
2. $(\mathcal{S}_2) \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & + & z & - & t & = & 1 \\ 2x & - & 4y & - & z & - & 3t & = & 3 \\ 5x & - & 10y & - & z & - & 7t & = & 7 \\ x & - & 2y & + & 4z & & & = & 0 \end{array} \right.$
3. $(\mathcal{S}_3) \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 2a & - & b & + & & & 5d & = & 0 \\ -3a & + & b & - & c & - & 8d & = & 0 \\ a & & & + & c & + & 3d & = & 0 \end{array} \right.$

4. $(\mathcal{S}_4)\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2a & + & 3b & - & c & - & d & = & 0 \\ 4a & + & 7b & + & 2c & + & 4d & = & 0 \\ 2a & + & 6b & + & 3c & + & 2d & = & 0 \\ a & + & b & & & + & d & = & 0 \end{array}\right.$

1.

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad (\mathcal{S}_1) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \\ 5 & -10 & -1 & -7 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}\right. \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{array}\right. \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La troisième ligne est impossible : le système $(\mathcal{S}_1)$ n'a pas de solution.

2.

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad (S_2) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \\ 5 & -10 & -1 & -7 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}\right. \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{array}\right. \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & + & z & - & t & = & 1 \\ & & & - & 3z & - & t & = & -1 \end{array}\right.$$

On pose $t = \lambda$, alors $z = -\frac{1+\lambda}{3}$, on pose $y = \mu$, alors $x = \frac{4}{3} + \frac{4\lambda}{3} + 2\mu$. Le système $(\mathcal{S}_2)$ admet donc une infinité de solutions : les quadruplets sous la forme $(\frac{4}{3} + \frac{4\lambda}{3} + 2\mu, \mu, \frac{1+\lambda}{3}, \lambda)$ avec λ et μ deux réels.

3.

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \quad (S_3) \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff L_1 \leftrightarrow L_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 & -8 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a + c + 3d = 0 \\ b + 2c + d = 0 \end{cases}$$

On pose $d = \lambda$, $c = \mu$ et on a $b = -\lambda - 2\mu$ et $a = -3\lambda - \mu$. Le système $(\mathcal{S}_3)$ admet donc une infinité de solutions : les quadruplets sous la forme $(-3\lambda - \mu, -\lambda - 2\mu, \mu, \lambda)$ avec λ et μ deux réels.

4.

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \quad (S_4) \iff \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff L_1 \leftrightarrow L_4 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff L_2 \leftrightarrow L_4 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 9 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} L_3 \leftarrow \frac{1}{7} L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{12}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{7} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La réduite de Gauss n'a pas de zéro sur la diagonale, le système est donc de Cramer. Comme il est également homogène, l'unique solution de (S_4) est de prendre $a = b = c = d = 0$.