Variables aléatoires à densité

Cours de É. Bouchet – ECS1

15 mai 2020

Table des matières

1 Généralités

1.1 Présentation

Les variables aléatoires discrètes ne couvrent pas tous les exemples de la vie courante, elles sont en particulier inefficaces pour modéliser les phénomènes qui présentent un caractère continu : durée de vie d'une ampoule, temps entre deux pannes pour une machine, distance parcourue par une voiture avec un plein, intensité dans une prise, etc.
Dans ce type de situation, la probabilité d'un événement élémentaire est nulle, car il y a une infinité de valeurs possibles : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X = x) = 0$. Cela signifie qu'il faut développer d'autres stratégies que la loi pour étudier X : on va se servir de la fonction de répartition.

Rappels Pour toute variable aléatoire réelle X, la **fonction de répartition** de X est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F_X(x) = P(X \leqslant x)$ et vérifie les quatre propriétés suivantes :

1. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$
2. F_X est continue à droite sur $\mathbb{R}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

On admettra ici que la réciproque de ce résultat est également vraie : pour toute fonction vérifiant ces quatre propriétés, il existe une variable aléatoire dont c'est la fonction de répartition.

1.2 Variables aléatoires à densité

Définition (Variable aléatoire à densité)**.**

On appelle **variable aléatoire à densité**, toute variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ privé éventuellement d'un nombre fini de points.

Proposition (Caractérisation de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité)**.**

Toute fonction F définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

1. F est croissante sur $\mathbb{R}$,
2. F est continue sur $\mathbb{R}$,
3. F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ privé éventuellement d'un nombre fini de points,
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$,
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$,

est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Démonstration. Les points 1, 2, 4 et 5 garantissent que F est une fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle. Les points 2 et 3 assurent ensuite qu'il s'agit d'une variable à densité. $\square$

Exemple 1. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité X.

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2},$$

qui est continue et positive sur $\mathbb{R}$. Les trois premiers points de la caractérisation sont donc bien vérifiés. De plus, on trouve par calcul direct que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 0$, d'où le résultat.

Exemple 2. On admet que $Y = X^2$ est une variable aléatoire. Montrer, en étudiant sa fonction de répartition, que Y est une variable aléatoire à densité.
On commence par calculer la fonction de répartition de Y (qui existe puisqu'on a admis que Y est une variable aléatoire) : soit $x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(X^2 \leqslant x)$. Donc si $x < 0$, $F_Y(x) = 0$, et si $x \geqslant 0$:

$$F_Y(x) = P(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}) = P([X \leqslant \sqrt{x}] \setminus [X \leqslant -\sqrt{x}]) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) = \frac{1}{1+e^{-\sqrt{x}}} - \frac{1}{1+e^{\sqrt{x}}},$$

où on a utilisé que X est à densité (ce qui permet de transformer des inégalités strictes en larges) et l'inclusion $[X \leqslant -\sqrt{x}] \subset [X \leqslant \sqrt{x}]$.
La fonction F_Y est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, par composée de fonctions usuelles. Donc elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. F_Y est de même continue sur $\mathbb{R}^*$. La continuité de l'exponentielle et de la racine en 0 donnent :

$$\lim_{x\to 0_+} F_Y(x) = F_Y(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 = \lim_{x\to 0_-} F_Y(x),$$

donc F_Y est continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}$ tout entier. Donc Y est une variable aléatoire à densité.
Rmq : il était inutile ici de vérifier les cinq points de la caractérisation de la fonction de répartition d'une variable à densité, puisqu'on sait déjà que F_Y est une fonction de répartition.

1.3 Caractérisation d'une variable à densité par sa densité

Définition (Densité)**.**

Soit X une variable à densité et F sa fonction de répartition. On appelle **densité** de X toute fonction f_X définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

1. $f_X \geqslant 0$,
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_X(x) = F'(x)$, sauf éventuellement en un nombre fini de points.

On définit alors $X(\Omega)$ comme le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ où f_X ne s'annule pas.

Remarque. Si f_X est une densité de X, toute fonction obtenue à partir de f_X en modifiant un nombre fini de valeurs (par des valeurs positives) est également une densité de X. $X(\Omega)$ peut donc varier (d'un nombre fini de points).

Remarque. F n'est pas forcément dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, ce qui signifie que $F'(x)$ peut ne pas exister en certains points (un nombre fini). D'où la nécessité de pouvoir définir autrement f_X en un nombre fini de points.

Exemple 3. Donner une densité des variables X et Y définies dans les exemples 1 et 2, en partant de leur fonction de répartition.
On commence par dériver les fonctions de répartition obtenues. F_X est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée de fonctions dérivables, et on peut poser $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_X(x) = F_X'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

F_Y est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et nécessite donc une disjonction de cas : si $x < 0$, on pose $f_Y(x) = F'_Y(x) = 0$, et si $x > 0$,

$$f_Y(x) = F'_Y(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}}{(1+e^{-\sqrt{x}})^2} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}}{(1+e^{\sqrt{x}})^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{e^{-\sqrt{x}}}{(1+e^{-\sqrt{x}})^2} + \frac{e^{\sqrt{x}}}{(1+e^{\sqrt{x}})^2}\right).$$

Il suffit de compléter avec $f_Y(0) = 0$ (par exemple) pour obtenir une densité.

Proposition (Caractérisation d'une densité d'une variable aléatoire à densité)**.**

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. f est une densité d'une variable aléatoire à densité si et seulement si f est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ privé éventuellement d'un nombre fini de points et vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1.$$

Exemple 4. Soit f la fonction définie par $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ pour x positif et nulle ailleurs. Montrer que f est une densité d'une variable Z.
La fonction est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$ (on pourrait montrer la continuité en 0, mais elle n'est pas nécessaire pour appliquer le résultat). De plus, si $A > 0$,

$$\int_{-\infty}^{A} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{A} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0 + \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^A = -e^{-\frac{A^2}{2}} - (-1) \mapsto_{A\to+\infty} 1.$$

Donc l'intégrale converge et vaut 1. Donc f est bien une densité de variable aléatoire.

1.4 Propriétés

Proposition.

Soit X une variable à densité, F_X sa fonction de répartition et f_X une densité, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt.$$

Remarque. En conséquence, si X est une variable aléatoire de densité f_X, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt = \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

Proposition.

Soit a et b deux réels. Si $a \leqslant b$,

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t)dt.$$

Démonstration. En utilisant successivement le fait que X soit à densité, l'inclusion $[X \leqslant a] \subset [X \leqslant b]$, l'expression de la fonction de répartition en fonction d'une densité et la relation de Chasles pour les intégrales convergentes, on trouve :

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = P([X \leqslant b] \setminus [X \leqslant a]) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{-\infty}^{b} f_X(t)dt - \int_{-\infty}^{a} f_X(t)dt = \int_a^b f_X(t)dt.$$

□

Remarque. Si X est une variable aléatoire de densité f_X, on retrouve bien que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X = x) = \displaystyle\int_x^x f_X(t)dt = 0$.

Exemple 5. Déterminer la fonction de répartition de la variable Z de l'exemple 4.
Il suffit d'intégrer la densité. Soit $t \in \mathbb{R}$, si $t \leqslant 0$ alors $F_Z(t) = \int_{-\infty}^t 0dx = 0$. Si $t > 0$, on a :

$$F_Z(t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^t xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0 + \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^t = -e^{-\frac{t^2}{2}} - (-1) = 1 - e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

1.5 Étude de $Y = aX + b$

Formule (Si $Y = aX + b$ avec $a > 0$)**.**

Soit X une variable aléatoire à densité, et $Y = aX + b$ avec $a > 0$. Alors Y est également une variable aléatoire à densité, et sa fonction de répartition et une densité sont données par : $\forall y \in \mathbb{R}$,

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), \quad f_Y(y) = \frac{1}{a}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Démonstration. (démonstration à connaître)

— $\forall y \in \mathbb{R}$, $[Y \leqslant y] \overset{a\geq 0}{=} \left[X \leqslant \dfrac{y-b}{a}\right] \in \mathcal{A}$, car X est une variable aléatoire réelle. Donc Y est une variable aléatoire.

— $\forall y \in \mathbb{R}$, $F_Y(y) = P(Y \leqslant y) \overset{a\geq 0}{=} P\left(X \leqslant \dfrac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right)$. Ainsi F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}$ privé éventuellement d'un nombre fini de points, par composée de fonctions. Donc Y est une variable à densité.

— En dérivant la fonction F_Y précédente aux points y où elle est dérivable, on obtient que $f_Y(y) = \dfrac{1}{a}f_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right)$ est une densité de Y (en les points de non dérivabilité, qui sont en nombre fini, cette valeur convient également).

□

Formule (Si $Y = aX + b$ avec $a < 0$)**.**

Soit X une variable aléatoire à densité, et $Y = aX + b$ avec $a < 0$. Alors Y est également une variable aléatoire à densité, et sa fonction de répartition et une densité sont données par : $\forall y \in \mathbb{R}$,

$$F_Y(y) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), \quad f_Y(y) = -\frac{1}{a}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Démonstration. (démonstration à connaître)

— $\forall y \in \mathbb{R}$, $[Y \leqslant y] \overset{a\leq 0}{=} \left[X \geqslant \dfrac{y-b}{a}\right] \in \mathcal{A}$, car X est une variable aléatoire réelle et par propriétés des tribus. Donc Y est une variable aléatoire.

— $\forall y \in \mathbb{R}$, $F_Y(y) = P(Y \leqslant y) \overset{a\leq 0}{=} P\left(X \geqslant \dfrac{y-b}{a}\right) = 1 - P\left(X < \dfrac{y-b}{a}\right) \overset{X \text{à densité}}{=} 1 - F_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right)$. Ainsi F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}$ privé éventuellement d'un nombre fini de points, par composée de fonctions. Donc Y est une variable à densité.

— En dérivant la fonction F_Y précédente aux points y où elle est dérivable, on obtient que $f_Y(y) = -\frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$ est une densité de Y (en les points de non dérivabilité, qui sont en nombre fini, cette valeur convient également).

$\square$

Remarque. On peut regrouper ces deux cas avec la formule suivante : $f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$.

Remarque. Si $a = 0$, alors $Y = b$ est une variable aléatoire certaine, et n'est donc pas une variable aléatoire à densité.

2 Moments d'une variable aléatoire à densité

2.1 Espérance

Définition (Espérance)**.**

Soit X une variable aléatoire de densité f_X. Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,dt$ est absolument convergente, alors X admet une espérance et $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$.

Exemple 6. Montrer que la variable aléatoire définie dans l'exemple 4 admet une espérance.
On doit vérifier la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|\,dx = \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$, qui est impropre en $+\infty$. Comme tout est positif, il suffit de vérifier que $x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. C'est bien le cas, car $\lim_{x\to+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ par croissances comparées. Donc la variable aléatoire admet une espérance, donnée par la valeur de l'intégrale. Elle n'est par contre pas simple à calculer.

Exemple 7. On considère la variable aléatoire dont une densité est la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^2}$ pour $x \geqslant 1$ et nulle ailleurs. Montrer que l'on définit bien ainsi une variable à densité X et que cette variable aléatoire n'admet pas d'espérance.
Commençons par montrer que f définit bien une densité. La fonction est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. En reconnaissant une intégrale de Riemann convergente, on trouve :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{2-1} = 1.$$

Donc f est bien une densité de variable aléatoire. Pour déterminer l'existence de l'espérance, on doit vérifier la convergence de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|\,dx = \int_{1}^{+\infty} x\frac{1}{x^2}dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}dx.$$

C'est une intégrale de Riemann divergente, donc X n'admet pas d'espérance.

Remarque. La densité est toujours positive, donc la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)dt$ est en réalité suffisante pour assurer l'existence de l'espérance.

Remarque. Si f est paire, le changement de variable affine $u = -t$ donne :

$$\int_{0}^{+\infty} tf(t)dt = \int_{0}^{-\infty} (-u)f(-u)(-1)du = -\int_{-\infty}^{0} uf(u)du.$$

Dans ce cas, $E(X)$ existe si et seulement si $\int_{0}^{+\infty} tf(t)dt$ converge. En cas d'existence, on a de plus $E(X) = 0$.

Proposition (Linéarité de l'espérance)**.**

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une espérance et a et b deux réels. Alors $aX+b$ admet une espérance, et :
$$E(aX+b) = aE(X)+b.$$

Démonstration. Le résultat découle (via le théorème de transfert pour les variables à densité, qui sera vu en seconde année) de la linéarité des intégrales convergentes et du fait que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$. □

2.2 Variables centrées

Définition (Variable centrée)**.**

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une espérance. On dit que X est une **variable centrée** lorsque $E(X) = 0$.

Remarque. Si $Y = \dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$, alors Y est centrée.

En effet, l'espérance existe par linéarité et vaut $E(Y) = \dfrac{E(X)-E(X)}{\sigma(X)} = 0$.

3 Loi uniforme

3.1 Loi uniforme sur $[0,1]$

Définition (Loi uniforme)**.**

La fonction définie par $f_X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité d'une variable aléatoire à densité X. On dit que X suit une **loi uniforme** sur $[0,1]$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

Démonstration. On montre l'existence : la fonction est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. De plus,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt = \int_0^1 1dt = [t]_0^1 = 1-0 = 1.$$
C'est donc bien une densité de variable aléatoire. □

Proposition (Fonction de répartition et espérance)**.**

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}[0,1]$ alors $F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<0 \\ t & \text{si} \quad t \in [0,1] \\ 1 & \text{si} \quad t>1 \end{cases}$. De plus X admet une espérance et $E(X) = \dfrac{1}{2}$.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour déterminer la fonction de répartition, il suffit de faire le calcul $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)du$, qui est immédiat si $t < 0$ ou $t > 1$. Entre 0 et 1 on a :

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)du = \int_{0}^{t} 1du = [u]_0^t = t.$$

Il ne reste plus qu'à étudier l'espérance. $\int_{-\infty}^{+\infty} |uf_X(u)|\, du = \int_0^1 udu$ est une intégrale convergente, donc $E(X)$ existe et :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} uf_X(u)du = \int_0^1 udu = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

□

3.2 Cas général : loi uniforme sur $[a, b]$ avec $a < b$

Définition (Loi uniforme, cas général)**.**

Soit $a < b$ deux réels. On dit que X suit une loi uniforme sur $[a, b]$ lorsque $\frac{1}{b-a}(X-a) \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$ et une densité est alors :

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Démonstration. On a $X = (b-a)Y + a$ avec $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. Par la formule sur les combinaisons linéaires de variables à densité, on obtient que X est une variable à densité, dont une densité est :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_X(t) = \frac{1}{b-a} f_Y\left(\frac{t-a}{b-a}\right).$$

Or $f_Y\left(\frac{t-a}{b-a}\right) = 1$ si $\frac{t-a}{b-a} \in [0,1] \iff t \in [a,b]$ et $f_Y\left(\frac{t-a}{b-a}\right) = 0$ sinon. D'où le résultat. □

Exemple 8. Soit $Z \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. Déterminer la loi de $Y = 2Z - 4$.
La formule précédente donne directement $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$ avec $b - a = 2$ et $a = -4$. Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([-4,-2])$.

Proposition (Fonction de répartition et espérance)**.**

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$, alors $F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{si} \quad t \in [a,b] \\ 1 & \text{si} \quad t > b \end{cases}$. De plus, X admet une espérance et $E(X) = \frac{b+a}{2}$.

Démonstration. On a $X = (b-a)Y + a$ avec $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, ce qui donne par la formule sur les combinaisons linéaires de variables à densité : $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$F_X(t) = F_Y\left(\frac{t-a}{b-a}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \frac{t-a}{b-a} < 0 \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{si} \quad \frac{t-a}{b-a} \in [0,1] \\ 1 & \text{si} \quad \frac{t-a}{b-a} > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{si} \quad t \in [a,b] \\ 1 & \text{si} \quad t > b \end{cases}.$$

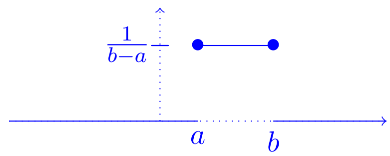
On obtient ensuite l'existence de l'espérance et sa valeur directement par linéarité :

$$E(X) = (b-a)E(Y) + a = \frac{1}{2}(b-a) + a = \frac{b+a}{2}.$$

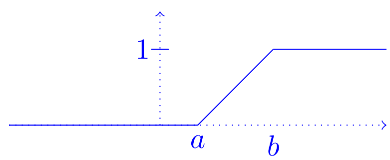
$\square$

3.3 Représentation graphique

Densité de probabilité :



Fonction de répartition :



4 Loi exponentielle

4.1 Définition et propriétés

Définition (Loi exponentielle)**.**

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X. On dit que X suit une **loi exponentielle** de paramètre λ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Démonstration. La fonction F est définie sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

- F est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, car la fonction nulle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_-^*$ et $t \to 1 - e^{-\lambda t}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (par composée de fonctions de classe C^1).
- De même, F est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Elle est de plus continue en 0 car $\lim\limits_{t \to 0}(1 - e^{-\lambda t}) = 0 = F(0)$. Donc F est continue sur $\mathbb{R}$.
- F est croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ car c'est la fonction nulle. Elle est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $F'(t) = \lambda e^{-\lambda t} \geqslant 0$. De plus, si $y < 0$ et $x \geqslant 0$, $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \geqslant 0 = F(y)$, ce qui permet de gérer le raccord. Donc F est croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ par composée de limites.

F est donc bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. $\square$

Proposition (Densité et espérance)**.**

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors $f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$ est une densité de X. De plus, X admet une espérance, et $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Démonstration. Il suffit de dériver la fonction de répartition (qui est bien dérivable partout, sauf peut-être en 0) pour trouver la densité proposée.
Pour l'espérance, on étudie la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda t} dt$. Cette intégrale est impropre en $+\infty$. Par croissances comparées, $t\lambda e^{-\lambda t} = o(\frac{1}{t^2}) \geqslant 0$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (intégrale de Riemann), donc $\int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt$ converge.
Donc X admet une espérance. Il reste par contre à la calculer.
Soit $A > 0$, $t \to t$ et $t \to -e^{-\lambda t}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, donc par intégration par parties :

$$\int_0^A t\lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-te^{-\lambda t}\right]_0^A - \int_0^A -e^{-\lambda t} dt = -Ae^{-\lambda A} + \left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^A = -Ae^{-\lambda A} - \frac{e^{-\lambda A}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}.$$

Or $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \left(-Ae^{-\lambda A} - \frac{e^{-\lambda A}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}$ (par croissances comparées pour le premier terme). Donc $E(X) = \frac{1}{\lambda}$. □

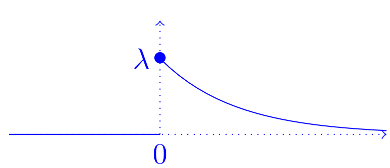
Proposition.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \Longleftrightarrow Y = \lambda X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

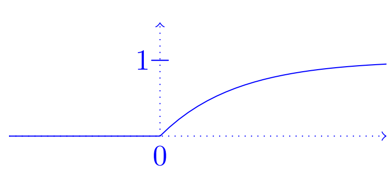
Démonstration. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y = \lambda X$. Par propriété des variables aléatoires à densité, Y est également une variable à densité dont une densité est : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_Y(t) = \frac{1}{\lambda} f_X(\frac{t}{\lambda})$.
Pour $t < 0$, on obtient $f_Y(t) = 0$ et pour $t \geqslant 0$, $f_Y(t) = \frac{1}{\lambda}\lambda e^{-\lambda \frac{t}{\lambda}} = e^{-t}$. Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.
La réciproque se montre de la même façon. □

4.2 Représentation graphique

Densité de probabilité :



Fonction de répartition :



4.3 Absence de mémoire

Proposition (Absence de mémoire de la loi exponentielle).

Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ alors pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$P_{[X>x]}(X > x + y) = P(X > y).$$

Démonstration. (démonstration à connaître) Si $x > 0$ et $y > 0$, on a $P(X > x) = 1 - F_X(x) \overset{x \geq 0}{=} e^{-\lambda x} > 0$, et donc :

$$P_{[X>x]}(X > x + y) = \frac{P([X > x + y] \cap [X > x])}{P(X > x)} \overset{y \geq 0}{=} \frac{P(X > x + y)}{P(X > x)} = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda y} = P(X > y).$$

D'où le résultat. □

Proposition (Variables aléatoires sans mémoire, réciproque).

Soit X une variable aléatoire à densité, à valeur dans $\mathbb{R}^+$ et qui vérifie la propriété d'absence de mémoire. Alors X suit une loi exponentielle.

5 Loi normale centrée réduite

5.1 Définition et propriétés

Définition (Loi normale centrée réduite).

La fonction définie par : $\forall t \in \mathbb{R},\ f_X(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ est une densité d'une variable aléatoire à densité X. On dit que X suit une **loi normale centrée réduite** et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Remarque. On verra dans un chapitre ultérieur (Convergence des variables aléatoires) que la loi normale centrée réduite est la loi limite (après réduction) de la somme dans une suite infinie d'épreuve répétées. Elle est donc souvent utilisée en pratique pour approximer la somme de phénomènes aléatoires petits, nombreux et indépendants.

Proposition (Fonction de répartition).

Pour tout réel t,

$$F_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

De plus, $F_X(-t) = 1 - F_X(t)$ et en particulier $F_X(0) = \dfrac{1}{2}$.

Démonstration. On utilise le changement de variable affine $u = -y$, (qui joue sur la parité de la densité) :

$$F_X(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-t} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right) = 1 - F_X(t).$$

Le cas particulier $t = 0$ donne alors $F_X(0) = \dfrac{1}{2}$. □

Formule.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Démonstration. D'après la proposition précédente, $\dfrac{1}{2} = F_X(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{u^2}{2}} du$. Donc

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{u^2}{2}} du \overset{v=-u}{=} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv.$$

□

Proposition (Espérance)**.**

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors X admet une espérance et $E(X) = 0$.

Démonstration. (démonstration à connaître) On étudie la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} |t f_X(t)|\, dt$, qui est impropre en $-\infty$ et $+\infty$. La parité de la densité permet de se contenter de vérifier la convergence en $+\infty$. Puisque $\frac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \geqslant 0$ et que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est une intégrale de Riemann convergente, il y a convergence. Donc X admet une espérance. La parité de la densité donne alors directement $E(X) = 0$.

Variante : on pouvait aussi procéder par calcul direct. Soit $(A, B) \in \mathbb{R}^2$,

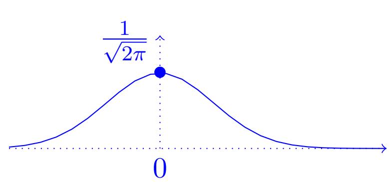
$$\int_A^B t f_X(t) dt = \int_A^B \frac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_A^B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{A^2}{2}} - e^{-\frac{B^2}{2}}\right).$$

Faire tendre A vers $-\infty$ et B vers $+\infty$ donne une limite nulle. D'où la convergence de l'intégrale et le résultat annoncé.

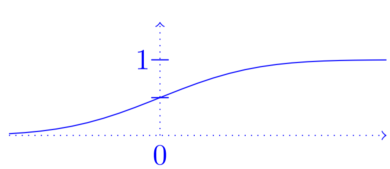
□

5.2 Représentation graphique

Densité de probabilité :



Fonction de répartition :



6 Loi normale générale, ou loi de Laplace-Gauss

6.1 Définition

Définition (Loi normale générale)**.**

Soit $(m,\sigma) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$. On dit que X suit une **loi normale** de paramètres m et σ^2 et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$ lorsque $\frac{1}{\sigma}(X-m) \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Une densité est alors : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Démonstration. On a $X = \sigma Y + m$ avec $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Par combinaison linéaire de variables à densité, X est également une variable à densité, dont une densité est pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f_X(t) = \frac{1}{\sigma} f_Y\left(\frac{t-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

D'où le résultat. □

6.2 Propriétés

Proposition (Fonction de répartition et espérance)**.**

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$, alors pour tout réel t,

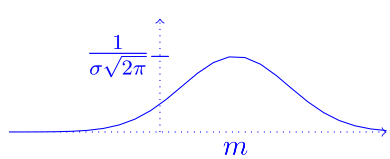
$$F_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}} du.$$

De plus, X admet une espérance, et $E(X) = m$.

Démonstration. La fonction de répartition de X s'obtient de manière directe, par primitive de sa densité. Pour l'espérance, on utilise la relation $X = \sigma Y + m$ avec $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. La linéarité de l'espérance donne l'existence de l'espérance et $E(X) = \sigma E(Y) + m = \sigma 0 + m = m$. □

6.3 Représentation graphique

Densité de probabilité :



Fonction de répartition :