Variables aléatoires discrètes

Cours de É. Bouchet – ECS1

25 mars 2021

Table des matières

1 Variables aléatoires discrètes

1.1 Définition

Définition (Variable aléatoire discrète, finie)**.**

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Alors $X(\Omega) = \{X(\omega) | \omega \in \Omega\}$ est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire.

- On dit que la variable aléatoire X est **discrète** lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable.
- On dit que la variable aléatoire X est **finie** lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble fini.

Proposition (Système complet d'événements lié à une variable aléatoire discrète)**.**

Soit X une variable aléatoire discrète, alors $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. En particulier, $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$.

Démonstration. X est une variable aléatoire donc $\forall x \in X(\Omega)$, $[X = x] \in \mathcal{A}$. Si x et y sont deux éléments distincts de $X(\Omega)$, alors les événements $[X = x]$ et $[X = y]$ sont incompatibles. De plus, $\bigcup_{x \in X(\Omega)} [X = x] = [X \in X(\Omega)] = \Omega$. Donc $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. La σ-additivité de P donne ensuite :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = P\left(\bigcup_{x \in X(\Omega)} [X = x] \right) = P(\Omega) = 1.$$

$\square$

Définition (Tribu associée à une variable aléatoire discrète)**.**

Soit X une variable aléatoire discrète. On appelle **tribu associée** à X la tribu engendrée par le système complet d'événements $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$. On la note $\mathcal{A}_X$.

1.2 Loi d'une variable aléatoire réelle discrète

Définition (Loi d'une variable aléatoire réelle discrète)**.**

Soit X une variable aléatoire discrète, on appelle **loi de X** la donnée de $X(\Omega)$ et des valeurs $P(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

Proposition.

Soit $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Si p_k est le terme général d'une série convergente à termes positifs vérifiant $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$, alors $\mathbb{N}$ et la suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ forment la loi d'une variable aléatoire discrète.

Démonstration. On pose $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P la probabilité telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(\{k\}) = p_k$. Soit X la fonction identité, c'est une variable aléatoire réelle car $\forall x \in \mathbb{R}$, $[X \leqslant x] = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \{k\} \in \mathcal{A}$. C'est de plus une variable aléatoire discrète car $X(\Omega) = \mathbb{N}$ est dénombrable. □

Exemple 1. Soit $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $P(X = i) = \dfrac{1}{i(i+1)}$. Justifier que X est une variable aléatoire réelle discrète.

On utilise le résultat précédent, en posant $p_i = \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$. Les p_i sont positifs et sont le terme général d'une série téléscopique convergente (car $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$). Il ne reste plus qu'à calculer la somme de la série :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = 1 - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1.$$

D'où le résultat.

1.3 Fonction de répartition

Proposition (La fonction de répartition caractérise la loi)**.**

Soit X une variable aléatoire discrète,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \sum_{x_k \in X(\Omega), x_k \leqslant x} P(X = x_k),$$

et réciproquement, si $X(\Omega) = \{x_1, \dots x_n \dots\}$ où les x_i sont classés par ordre croissant,

$$P(X = x_1) = F_X(x_1) \quad \text{et} \quad \forall k \geqslant 2, \quad P(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1}).$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle faite dans le cas des variables aléatoires finies. □

1.4 Fonction d'une variable aléatoire

Proposition (Fonction d'une variable aléatoire)**.**

Soit X une variable aléatoire discrète et g une fonction réelle telle que $X(\Omega) \subset D_g$. Alors la fonction $Y = g(X)$ est également une variable aléatoire discrète (ou finie).

Démonstration. La fonction $Y = g \circ X$ est définie sur Ω (car $X(\Omega) \subset D_g$) à valeurs réelles. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$[Y \leqslant x] = [g \circ X \leqslant x] = \bigcup_{y \in Y(\Omega), y \leqslant x} [g \circ X = y] = \bigcup_{y \in Y(\Omega), y \leqslant x} \; \bigcup_{z \in X(\Omega), g(z) = y} [X = z].$$

Or X est une variable aléatoire, donc $[X = z] \in \mathcal{A}$. Comme $X(\Omega)$ est dénombrable, la stabilité des tribus par union dénombrable donne $[Y \leqslant x] \in \mathcal{A}$. Donc Y est bien une variable aléatoire. De plus, comme $X(\Omega)$ est dénombrable, $Y(\Omega) = g(X(\Omega))$ est dénombrable ou fini. D'où le résultat. □

Exemple 2. Soit un réel C. On pose, pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$, $u_n = \dfrac{C}{n(n-1)}$. Montrer qu'il existe une unique valeur de C telle que la suite u soit la loi d'une variable aléatoire réelle discrète X. Déterminer la loi de $Y = |X|$.
u est à termes positifs si et seulement si $C \geqslant 0$. Par ailleurs, $\frac{C}{n(n-1)} \sim \frac{C}{n^2} \geqslant 0$, donc la série est convergente sur $\mathbb{N}^*$ par critère de comparaison avec une série de Riemann convergente. De même, l'opposé de la série est convergent sur les entiers négatifs. Donc la série de terme général u_n converge sur $\mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$, et on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1\}} \frac{C}{n(n-1)} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{C}{n(n-1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C}{-n(-n-1)} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{C}{n(n-1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C}{n(n+1)} \\
&= C \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + C \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= C(1-0) + C(1-0) \\
&= 2C.
\end{aligned}$$

Donc u est la loi d'une variable aléatoire réelle discrète X si et seulement si $C = \dfrac{1}{2}$. Pour cette valeur, $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall n \geqslant 2, \quad [Y=n] = [X=n] \cup [X=-n], \qquad \text{et } [Y=1] = [X=-1],$$

où les événements des unions sont incompatibles. Donc par passage aux probabilités,

$$\forall n \geqslant 2, \quad P(Y=n) = \frac{C}{n(n-1)} + \frac{C}{-n(-n-1)} = \frac{1}{n^2-1}, \qquad \text{et } P(Y=1) = \frac{C}{(-1)(-2)} = \frac{1}{4}.$$

2 Moments

2.1 Espérance

Définition (Espérance d'une variable aléatoire discrète)**.**

Soit X une variable aléatoire discrète. On dit que X admet une **espérance** lorsque la série de terme général $xP(X=x)$ est absolument convergente, et on a alors :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x).$$

Remarque. L'espérance d'une variable aléatoire discrète peut donc ne pas exister, contrairement au cas des variables finies.

Exemple 3. Soit X la variable aléatoire de l'exemple 1, qui vérifie $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $P(X=i) = \dfrac{1}{i(i+1)}$. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?
$\sum |iP(X=i)| = \sum \frac{i}{i(i+1)} = \sum \frac{1}{i+1}$. On reconnaît la série harmonique (à un décalage d'indice près), qui diverge. Donc X n'admet pas d'espérance.

2.2 Théorème de transfert

Théorème (Théorème de transfert, cas discret)**.**

Soit X une variable aléatoire discrète et g une fonction réelle telle que $X(\Omega) \subset D_g$, on pose $Y = g(X)$. La variable aléatoire Y admet une espérance si et seulement si la série de terme général $g(x)P(X = x)$ converge absolument, et on a alors :

$$E(Y) = E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x).$$

Démonstration. On remarque que $Y(\Omega) = g(X(\Omega))$. Soit $y \in Y(\Omega)$, on pose $G_y = \{x \in X(\Omega) | g(x) = y\}$. On a alors :

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad P(Y = y) = \sum_{x \in G_y} P(X = x) \quad \text{donc} \quad yP(Y = y) = \sum_{x \in G_y} g(x)P(X = x),$$

où les sommes sont dénombrables et convergent par propriétés des probabilités. De plus, $\bigcup_{y \in Y(\Omega)} G_y = X(\Omega)$ (union dénombrable), et les G_y sont disjoints deux à deux, on obtient donc par σ-additivité des probabilités que $\sum |yP(Y = y)|$ converge si et seulement si $\sum |g(x)P(X = x)|$ converge, et que sous réserve de convergence,

$$E(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} yP(Y = y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(\sum_{x \in G_y} g(x)P(X = x) \right) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x).$$

$\square$

Exemple 4. Soit X une variable aléatoire discrète sur $\mathbb{N}$, et un réel $\lambda > 0$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} \exp(-\lambda).$$

Montrer que $\frac{1}{X+1}$ admet une espérance et la calculer.

$$\sum \left| \frac{1}{1+n} P(X = n) \right| = \sum \frac{1}{1+n} \frac{\lambda^n}{n!} \exp(-\lambda) = \exp(-\lambda) \sum \frac{\lambda^n}{(n+1)!} = \frac{\exp(-\lambda)}{\lambda} \sum \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On reconnaît une série exponentielle convergente, donc par théorème de transfert, $\frac{1}{1+X}$ admet une espérance qui vaut :

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{\exp(-\lambda)}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{\exp(-\lambda)}{\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \frac{\exp(-\lambda)}{\lambda} (\exp(\lambda) - 1) = \frac{1 - \exp(-\lambda)}{\lambda}.$$

Proposition (Propriétés de l'espérance)**.**

Soient a et b deux réels et X une variable aléatoire discrète admettant une espérance. Alors :

- Si $X(\Omega) \subset [a, b]$ alors $E(X) \in [a, b]$.
- $E(aX + b)$ existe et vaut $aE(X) + b$.

Démonstration. (démonstration à connaître) On note $(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ les éléments de $X(\Omega)$.

— Supposons $X(\Omega) \subset [a, b]$. Alors pour tout $n \geqslant 1$,
$$a \sum_{k=1}^{n} P(X = x_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k) \leqslant b \sum_{k=1}^{n} P(X = x_k).$$
Ces trois sommes admettent une limite finie pour $n \to +\infty$, car on a supposé que $E(X)$ existe et que X est une variable aléatoire discrète. Comme $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = x_k) = 1$, le passage à la limite donne $a \leqslant E(X) \leqslant b$.

— Les séries $\sum x_k P(X = x_k)$ et $\sum P(X = x_k)$ convergent absolument, donc par inégalité triangulaire et linéarité des séries convergentes $\sum (a x_k + b) P(X = x_k)$ converge absolument. On en déduit par théorème de transfert que $aX + b$ admet une espérance, et
$$E(aX + b) = \sum_{k=1}^{+\infty} (a x_k + b) P(X = x_k) = a \sum_{k=1}^{+\infty} x_k P(X = x_k) + b \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = x_k) = aE(X) + b.$$

□

2.3 Moments d'ordre r

Définition (Moment d'ordre r)**.**

Soit X une variable aléatoire discrète telle que X^r admet une espérance. On appelle **moment d'ordre r** de la variable aléatoire X le réel :
$$E(X^r) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r P(X = x).$$

Définition (Moment centré d'ordre r)**.**

Soit X une variable aléatoire discrète telle que $(X - E(X))^r$ admet une espérance. On appelle **moment centré d'ordre r** de la variable aléatoire X le réel :
$$E\left((X - E(X))^r\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^r P(X = x).$$

Remarque. Si X admet un moment d'ordre r, alors X admet un moment d'ordre p pour tout $p \in [\![1, r]\!]$.

2.4 Variance

Définition (Variance, écart-type)**.**

Soit X une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2. On appelle **variance** de X le moment centré d'ordre 2 de X, noté $V(X)$. On appelle **écart-type** de X la valeur $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Proposition.

Soient a et b deux réels et X une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2. Alors $aX + b$ admet un moment d'ordre 2, et
$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Démonstration. X admet un moment d'ordre 2, donc en particulier une espérance. $E(aX+b)$ existe donc et on a par linéarité de l'espérance :

$$(aX+b-E(aX+b))^2 = (aX+b-aE(X)-b)^2 = a^2(X-E(X))^2.$$

Comme X admet un moment d'ordre 2, cette variable aléatoire admet une espérance. Donc $V(aX+b)$ existe et on a :

$$V(aX+b) = E\left((aX+b-E(aX+b))^2\right) = a^2E((X-E(X))^2) = a^2V(X).$$

□

Proposition (Formule de Huygens)**.**

Soit X une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Démonstration. L'existence de tous les termes est garantie par l'existence d'un moment d'ordre 2. Le calcul se fait ensuite exactement comme dans le cas des variables aléatoires finies. □

Théorème (Variable aléatoire de variance nulle)**.**

Si X est une variable aléatoire discrète de variance nulle, alors il existe un réel a pour lequel $P(X=a)=1$, et on dit que X est une variable **quasi-certaine**.

Démonstration. La preuve est calquée sur celle du cas fini, il suffit de remplacer la somme finie par la somme d'une série convergente (la convergence étant assurée par l'existence de la variance). □

2.5 Variables centrées réduites

Définition (Variable aléatoire centrée réduite)**.**

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance non nulle. On appelle **variable aléatoire centrée réduite** associée à X la variable notée X^* définie par :

$$X^* = \frac{X-E(X)}{\sqrt{V(X)}}.$$

3 Lois discrètes usuelles

3.1 Rappels et compléments sur les lois finies

Les lois certaine, de Bernoulli, binomiale et uniforme peuvent toujours être définies comme au premier semestre. On a notamment :

Définition (Variable indicatrice d'un événement, généralisation).

Soit Ω un univers, et $\mathcal{A}$ une tribu de Ω. Soit E un élément de $\mathcal{A}$. La variable aléatoire X qui vérifie

$$\left\{\begin{array}{lcccl} X(\omega) & = & 1 & \text{si} & \omega \in E \\ X(\omega) & = & 0 & \text{si} & \omega \notin E \end{array}\right.$$

est appelée la **variable indicatrice de l'événement** E. On la note $\mathbb{1}_E$.

3.2 Loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$

Définition (Loi géométrique).

Une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X = n) = (1-p)^{n-1}p.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Remarque. La notation $q = 1 - p$ est souvent utilisée, et on a alors : $P(X = n) = q^{n-1}p$

Démonstration. Il faut montrer que ces propriétés permettent bien de définir une loi de variable aléatoire. Il est immédiat que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(1-p)^{n-1}p \geqslant 0$. Par ailleurs, $\sum(1-p)^{n-1}p = \frac{p}{1-p}\sum(1-p)^n$ est une série géométrique convergente, puisque $|1-p| < 1$, donc la série converge, et sa somme vaut :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{n-1}p = \frac{p}{1-p}\frac{1-p}{1-(1-p)} = 1.$$

D'où le résultat. □

Remarque. Modélisation : la loi géométrique correspond à la loi du temps d'attente du premier succès d'une succession de tirages de Bernoulli indépendants et de même paramètre p.
Soit $i \in \mathbb{N}^*$, on pose S_i l'événement « la i-ème expérience est un succès » et on note X le rang du premier succès. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'indépendance des expériences donne :

$$P(X = k) = P\left((\bigcap_{i=1}^{k-1}\overline{S_i}) \cap S_k\right) = \left(\prod_{i=1}^{k-1}P(\overline{S_i})\right)P(S_k) = (1-p)^{k-1}p.$$

Donc $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Exemple 5. On tire une suite infinie de pile ou face avec une pièce équilibrée, et on note X le numéro du premier pile. X correspond au rang du premier succès (« tirer un pile ») dans une succession d'expériences indépendantes, ou chaque expérience a une probabilité de succès de $\frac{1}{2}$. Donc $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Proposition (Fonction de répartition de la loi géométrique).

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X \leqslant n) = 1 - q^n \text{ et } P(X > n) = q^n.$$

Démonstration. On obtient par calcul direct : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X \leqslant n) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} p \overset{i=k-1}{=} p \sum_{i=0}^{n-1} (1-p)^i = p \frac{1-q^n}{1-q} = 1 - q^n.$$

On en déduit ensuite directement $P(X > n) = 1 - P(X \leqslant n) = q^n$. □

Proposition (Espérance de la loi géométrique)**.**

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Alors X admet une espérance, et

$$E(X) = \frac{1}{p}.$$

Démonstration. La série $\sum |nP(X=n)| = \sum n(1-p)^{n-1}p = p \sum n(1-p)^{n-1}$ est une série géométrique dérivée convergente (car $|1-p| < 1$), donc l'espérance existe et vaut :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = p \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}.$$

□

Proposition (Variance de la loi géométrique)**.**

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$. Alors X admet une variance, et

$$V(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Démonstration. (démonstration à connaître) La série :

$$\sum \left| n^2 P(X=n) \right| = \sum n^2 (1-p)^{n-1} p = p(1-p) \sum n(n-1)(1-p)^{n-2} + p \sum n(1-p)^{n-1}$$

est une somme de séries géométriques dérivées convergentes (car $|1-p| < 1$), donc X admet un moment d'ordre 2. En suivant cette décomposition, on trouve :

$$\begin{aligned} E(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 (1-p)^{k-1} p = p(1-p) \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\ &= p(1-p) \frac{2}{(1-(1-p))^3} + E(X) \\ &= \frac{2-2p}{p^2} + \frac{1}{p} \\ &= \frac{2-p}{p^2}. \end{aligned}$$

La formule de Huygens donne alors $V(X) = \dfrac{2-p}{p^2} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{q}{p^2}$. □

3.3 Loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$

Définition (Loi de Poisson).

Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Démonstration. Il faut montrer que ces propriétés permettent bien de définir une loi de variable aléatoire. Il est immédiat que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \geqslant 0$. Par ailleurs, $\sum \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum \frac{\lambda^n}{n!}$ est une série exponentielle convergente, et sa somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

D'où le résultat. □

Remarque. La loi de Poisson est généralement utilisée pour modéliser le nombre d'événements se produisant dans un intervalle de temps fixé, si ces événements se produisent avec une fréquence moyenne connue et indépendamment du temps écoulé depuis l'événement précédent.

Proposition (Espérance de la loi de Poisson).

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Alors X admet une espérance, et :

$$E(X) = \lambda.$$

Démonstration. La série $\sum |nP(X = n)| = \sum n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$ est une série exponentielle convergente. L'espérance existe donc, et vaut :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 0 + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \overset{i=k-1}{=} \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

□

Proposition (Variance de la loi de Poisson).

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Alors X admet une variance, et :

$$V(X) = \lambda.$$

Démonstration. (démonstration à connaître) On commence par étudier la convergence de $\sum \left| n^2 P(X = n) \right|$:

$$\sum n^2 \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum n \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum (n-1) \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}.$$

La série exponentielle étant convergente, X admet un moment d'ordre 2, et :

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \overset{i=k-2}{=} \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} + E(X) = \lambda^2 + \lambda.$$

La formule de Huygens donne alors $V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$. $\square$

4 Tableau récapitulatif des lois usuelles

X	$X(\Omega)$	$P(X = k)$	$E(X)$	$V(X)$
Certaine	$\{a\}$	1 ou 0	a	0
Uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$	$[\![1, n]\!]$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$	$[\![a, b]\!]$	$\frac{1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$	$\{0, 1\}$	p ou $1-p$	p	$p(1-p)$
Binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$	$[\![0, n]\!]$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Géométrique : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ