Variables aléatoires sur un espace fini

Cours de É. Bouchet – ECS1

16 février 2022

Table des matières

1 Variables aléatoires

Dans tout ce chapitre Ω est un univers **fini**.

1.1 Définitions

Définition (Variable aléatoire réelle)**.**

On appelle **variable aléatoire réelle** définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ toute application de Ω dans $\mathbb{R}$. Si X est une variable aléatoire, on note

$$X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$$

l'ensemble des valeurs prises par X.

Remarque. Puisque Ω est un univers fini, $X(\Omega)$ est fini également. On parle alors de variable aléatoire finie.

Exemple 1. Une expérience aléatoire consiste à lancer n fois une pièce équilibrée. On note 1 pour face et 0 pour pile. Ainsi Ω est l'ensemble des n-listes d'éléments de $\{0; 1\}$.

1. On pose X_1 la fonction qui à un élément de Ω associe 1 si le premier lancer donne face, 0 sinon. $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$.
2. On pose X_2 la fonction qui à un élément de Ω associe le nombre de face obtenu. $X_2(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
3. On pose X_3 la fonction qui à un élément de Ω associe le rang d'apparition du premier pile, s'il existe, et 0 sinon. $X_3(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

Exemple 2. On lance 2 dés équilibrés de couleurs différentes.

1. On considère Y la fonction qui à un lancer associe la somme. $Y(\Omega) = [\![2, 12]\!]$.
2. On considère X la fonction qui à un lancer associe 2 si les deux dés prennent les valeurs 5 ou 6, 1 si l'un des deux dés seulement prend la valeur 5 ou 6 et -1 sinon. $X(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$.

On utilise des notations entre crochets pour désigner les événements associés à une variable aléatoire X. Par exemple,

L'événement « X prend la valeur x » est noté $[X = x]$.

L'événement « X prend une valeur inférieure à x » est noté $[X \leqslant x]$.

L'événement « X prend une valeur comprise entre a et b » est noté $[a \leqslant X \leqslant b]$.

Proposition (Système complet d'événements lié à une variable aléatoire)**.**

Soit X une variable aléatoire finie, alors $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. En particulier,

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x]) = 1.$$

Démonstration. Soit $x \in X(\Omega)$. Par définition d'une variable aléatoire réelle, $[X = x]$ est un événement de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Si x et y sont deux éléments distincts de $X(\Omega)$, $[X = x]$ et $[X = y]$ sont incompatibles, car la fonction X ne peut pas prendre deux valeurs différentes sur un même événement élémentaire. De plus,

$$\bigcup_{x \in X(\Omega)} [X = x] = [X \in X(\Omega)] = \Omega.$$

Donc $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. L'égalité annoncée en découle par passage aux probabilités. □

Remarque. L'écriture $P(X = x)$ est souvent utilisée à la place de $P([X = x])$ pour alléger les notations.

1.2 Loi d'une variable aléatoire

Définition (Loi d'une variable aléatoire)**.**

Soit X une variable aléatoire finie, on appelle **loi de X** la donnée de $X(\Omega)$ et des valeurs $P(X = x_k)$ pour x_k parcourant $X(\Omega)$.

Exemple 3. On lance une pièce équilibrée, et on définit la variable aléatoire Z comme valant 0 si la pièce donne face, et 1 sinon. Déterminer la loi de Z.
La loi de Z est : $Z(\Omega) = \{0, 1\}$, $P(Z = 1) = \dfrac{1}{2}$, $P(Z = 0) = \dfrac{1}{2}$.

Exemple 4. Déterminer la loi de la variable aléatoire X de l'exemple 2.
On a déjà déterminé que $X(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$. On pose D_i l'événement « le i-ème dé prend la valeur 5 ou 6 ». L'indépendance des lancers permet alors les calculs des probabilités :

$$P(X = 2) = P(D_1 \cap D_2) = P(D_1)P(D_2) = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{9},$$

$$P(X = -1) = P(\overline{D_1} \cap \overline{D_2}) = P(\overline{D_1})P(\overline{D_2}) = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{9},$$

$$P(X = 1) = P\left((D_1 \cap \overline{D_2}) \cup (\overline{D_1} \cap D_2)\right) = P(D_1 \cap \overline{D_2}) + P(\overline{D_1} \cap D_2) = \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{4}{9},$$

où la gestion de l'union découle de l'incompatibilité des événements considérés.
Remarque : pour le calcul de $P(X = 1)$, on pouvait aussi remarquer que $P(X = 1) = 1 - P(X = 2) - P(X = -1) = \frac{4}{9}$.

Proposition.

Soit $(p_k)_{k \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$. Si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $p_k \geqslant 0$ et si

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1,$$

alors $[\![1, n]\!]$ et $(p_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ forment la loi d'une variable aléatoire finie.

Démonstration. On pose $\Omega = [\![1, n]\!]$, $P(\{k\}) = p_k$, et X la fonction identité. Il est alors direct que P engendre une probabilité, et que X est une variable aléatoire. □

Exemple 5. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la n-liste $(u_1, \ldots, u_n)$ définie pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ par $u_i = \alpha \times i$. Cette n-liste définit-elle une loi d'une variable aléatoire réelle ?
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $u_i \geqslant 0$ si et seulement si $\alpha \geqslant 0$. Par ailleurs, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha i = \alpha \sum_{i=1}^{n} i = \alpha \frac{n(n+1)}{2},$$

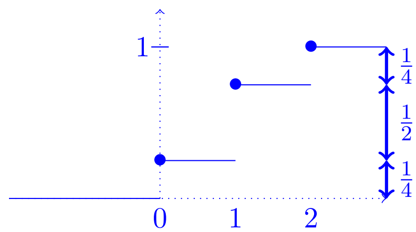
ce qui est égal à 1 ssi $\alpha = \frac{2}{n(n+1)}$. Cette valeur étant positive, la liste définit une loi de variable aléatoire finie si et seulement si $\alpha = \frac{2}{n(n+1)}$.

1.3 Fonction de répartition

Définition (Fonction de répartition)**.**

Soit X une variable aléatoire finie, on appelle **fonction de répartition de X** la fonction F_X définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
$$F_X(x) = P(X \leqslant x).$$

Exemple 6. On lance deux fois une pièce équilibrée. Soit X la variable aléatoire qui vaut 0 si on obtient deux fois pile, 2 si on obtient deux fois face, et 1 sinon. Quelle est la loi de X ? Tracer sa fonction de répartition.
$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, avec $P(X = 0) = P(X = 2) = \dfrac{1}{4}$, et $P(X = 1) = 1 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$. D'où le tracé :



1.3.1 Lien entre loi et fonction de répartition

Proposition (La fonction de répartition caractérise la loi)**.**

Soit X une variable aléatoire finie,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \sum_{\substack{x_k \in X(\Omega) \\ x_k \leqslant x}} P(X = x_k),$$
et réciproquement, si $X(\Omega) = \{x_1, \dots x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$,
$$P(X = x_1) = F_X(x_1) \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![2, n]\!], \quad P(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1}).$$

Démonstration. (démonstration à connaître) Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$[X \leqslant x] = \bigcup_{\substack{x_k \in X(\Omega) \\ x_k \leqslant x}} [X = x_k].$$
Or les événements $[X = x_k]$ sont incompatibles deux à deux. Par additivité de la probabilité, on obtient donc :
$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = \sum_{\substack{x_k \in X(\Omega) \\ x_k \leqslant x}} P(X = x_k).$$
D'où la première relation. Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots x_n\}$, le cas $x = x_1$ nous donne alors directement $P(X = x_1) = F_X(x_1)$. Et si $k \in [\![2, n]\!]$,
$$F_X(x_k) = \sum_{i=1}^{k} P(X = x_i) = P(X = x_k) + F_X(x_{k-1}).$$
D'où la dernière relation. $\square$

Exemple 7. Une urne contient p boules numérotées de 1 à p. On tire n boules avec remise, et on note X le plus grand des numéros tirés. Trouver la loi de X.
On remarque que $X(\Omega) = [\![1, p]\!]$: l'inclusion $X(\Omega) \subset [\![1, p]\!]$ est immédiate car X est un numéro de boule, et si $k \in [\![1, p]\!]$, on réalise $[X = k]$ par exemple en tirant $n - 1$ fois 1 puis k, d'où l'égalité des ensembles.
Si $n = 1$, on sait que X est telle que $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $P(X = k) = \frac{1}{p}$. Le problème est de « passer au maximum » quand on a plusieurs tirages. Pour cela, on va utiliser les fonctions de répartition.
On pose X_l la variable aléatoire correspondant au numéro du l-ième tirage. On a alors $X = \max\limits_{l \in [\![1,n]\!]} X_l$, et pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la définition du max et l'indépendance mutuelle des événements $[X_l \leqslant t]$ donnent :

$$F_X(k) = P(X \leqslant k) = P\left(\max_{l \in [\![1,n]\!]} X_l \leqslant k\right) = P\left(\bigcap_{l=1}^{n} [X_l \leqslant k]\right) = \prod_{l=1}^{n} P(X_l \leqslant k) = \prod_{l=1}^{n} F_{X_l}(k).$$

Or $F_{X_l}(k) = P(X_l \leqslant k) = \frac{k}{p}$ par équiprobabilité. Donc

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \quad F_X(k) = \left(\frac{k}{p}\right)^n.$$

La proposition précédente donne alors :

$$\forall k \in [\![2, p]\!], \quad P(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1) = \left(\frac{k}{p}\right)^n - \left(\frac{k-1}{p}\right)^n \quad \text{et} \quad P(X = 1) = F_X(1) = \left(\frac{1}{p}\right)^n.$$

Rmq : on vérifie bien par télescopage que ces valeurs se somment à 1.

1.3.2 Propriétés d'une fonction de répartition

Proposition.

Soit X une variable aléatoire finie et F_X sa fonction de répartition. Alors

1. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$,
2. F_X est continue à droite sur $\mathbb{R}$,
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$,
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

Démonstration. Ce résultat sera démontré (dans un cadre un peu plus général) dans un chapitre ultérieur. □

1.4 Fonction d'une variable aléatoire

Proposition (Fonction d'une variable aléatoire)**.**

Soit X une variable aléatoire finie et g une fonction réelle telle que $X(\Omega) \subset D_g$, c'est à dire telle que g est définie sur $X(\Omega)$. La fonction $Y = g(X)$ définie sur Ω par

$$Y(\omega) = g(X(\omega))$$

est également une variable aléatoire.

Démonstration. La fonction $Y = g \circ X$ est définie sur Ω (car $X(\Omega) \subset D_g$) à valeurs réelles, par définition c'est donc une variable aléatoire. $\square$

Exemple 8. On reprend les variables aléatoires de l'exemple 1 (lancer n fois une pièce équilibrée) : X_1 est la fonction qui à un élément de Ω associe 1 si le premier lancer donne face, 0 sinon. On définit

$$X = 2X_1 - 1,$$

c'est la fonction qui à un élément de Ω associe 1 si le premier lancer donne face, -1 sinon, et c'est également une variable aléatoire.

Proposition (Loi de Y)**.**

Soit X une variable aléatoire finie et $Y = g(X)$. Pour tout $y_i \in Y(\Omega)$,

$$P(Y = y_i) = \sum_{\substack{x_k \in X(\Omega) \\ g(x_k) = y_i}} P(X = x_k).$$

Démonstration. $\forall y_i \in Y(\Omega)$, $P(Y = y_i) = P(g(X) = y_i)$. Or $[g(X) = y_i] = \bigcup_{\substack{x_k \in X(\Omega) \\ g(x_k) = y_i}} [X = x_k]$, et les x_k sont distincts, les événements sont donc incompatibles deux à deux. D'où le résultat. $\square$

Exemple 9. On reprend la variable aléatoire X de l'exemple 2 et on pose $Y = X^2$. Déterminer la loi de Y.
$X(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$ donc $Y(\Omega) = \{1, 4\}$. De plus,

$$P(Y = 1) = P(X = 1) + P(X = -1) = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9} \quad \text{et} \quad P(Y = 4) = P(X = 2) = \frac{1}{9}.$$

2 Moments

2.1 Espérance

Définition (Espérance)**.**

Soit X une variable aléatoire finie. On appelle **espérance** de X le nombre réel

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x).$$

Remarque. Dans le cas où $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, alors

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k P(X = k).$$

2.2 Théorème de transfert

Théorème (Théorème de transfert)**.**

Soit X une variable aléatoire finie et g une fonction réelle telle que $X(\Omega) \subset D_g$, on pose $Y = g(X)$. Alors :

$$E(Y) = E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x).$$

Démonstration. On remarque que $Y(\Omega) = g(X(\Omega))$. Soit $y \in Y(\Omega)$, on pose $G_y = \{x \in X(\Omega) | g(x) = y\}$. On a alors :

$$P(Y = y) = \sum_{x \in G_y} P(X = x) \quad \text{donc} \quad yP(Y = y) = \sum_{x \in G_y} g(x)P(X = x).$$

Comme par construction, $\bigcup_{y \in Y(\Omega)} G_y = X(\Omega)$ et les G_y sont disjoints deux à deux, on obtient en sommant :

$$E(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} yP(Y = y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(\sum_{x \in G_y} g(x)P(X = x) \right) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x).$$

□

Proposition (Propriétés de l'espérance)**.**

Soient a et b deux réels et X une variable aléatoire finie.
- Si $X(\Omega) \subset [a, b]$, alors $E(X) \in [a, b]$.
- $E(aX + b) = aE(X) + b$ (linéarité de l'espérance).

Démonstration.
- Supposons $X(\Omega) \subset [a, b]$. Alors $\forall x \in X(\Omega)$, $a \leqslant x \leqslant b$. En multipliant par $P(X = x) \geqslant 0$ puis en sommant sur les différentes valeurs de x, on obtient :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} aP(X = x) \leqslant \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) \leqslant \sum_{x \in X(\Omega)} bP(X = x),$$

  et comme $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$, le calcul des trois sommes donne bien $a \leqslant E(X) \leqslant b$.
- Par théorème de transfert puis linéarité de la somme,

$$E(aX + b) = \sum_{x \in X(\Omega)} (ax + b)P(X = x) = a \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) + b \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = aE(X) + b.$$

□

Remarque. Si X et Y sont deux variables aléatoires finies, on a également $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$. Ce résultat sera montré en deuxième année.

2.3 Moments d'une variable aléatoire

Définition (Moment)**.**

Soit X une variable aléatoire finie et $r \in \mathbb{N}^*$. On appelle **moment** d'ordre r de X le nombre réel :

$$E(X^r) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r P(X = x).$$

Remarque. La deuxième égalité est une simple application du théorème de transfert à la variable aléatoire X et à la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \to x^r$.

Définition (Moment centré)**.**

Soit X une variable aléatoire finie et $r \in \mathbb{N}^*$. On appelle **moment centré** d'ordre r de X le nombre réel :

$$E\left((X - E(X))^r\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^r P(X = x).$$

2.4 Variance

2.4.1 Définition

Définition (Variance)**.**

Soit X une variable aléatoire finie On appelle **variance** de X le moment centré d'ordre deux

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

et **écart-type** de X la quantité $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

2.4.2 Propriétés

Proposition.

Soient a et b deux réels et X une variable aléatoire finie, alors

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Démonstration. Par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= E\left((aX + b - E(aX + b))^2\right) \\ &= E\left((aX + b - aE(X) - b)^2\right) \\ &= a^2 E((X - E(X))^2) \\ &= a^2 V(X) \end{aligned}$$

□

Proposition (Formule de Huygens).

Soit X une variable aléatoire finie. Alors :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Démonstration. (démonstration à connaître) Par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left((X - E(X))^2\right) \\ &= E(X^2 + E(X)^2 - 2E(X)X) \\ &= E(X^2) + E(X)^2 - (2E(X))E(X) \\ &= E(X^2) + E(X)^2 - 2E(X)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

Remarque : on a utilisé la version « hors programme » de l'espérance de la somme de deux variables aléatoires. □

2.5 Variable aléatoire centrée réduite

Définition (Variable aléatoire centrée réduite).

Soit X une variable aléatoire finie de variance non nulle. On appelle **variable aléatoire centrée réduite associée** à X la variable notée X^* définie par :

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}.$$

Remarque. Par propriétés de l'espérance et de la variance, on a alors toujours :

$$E(X^*) = \frac{E(X) - E(X)}{\sqrt{V(X)}} = 0 \quad \text{et} \quad V(X^*) = \frac{V(X)}{(\sqrt{V(X)})^2} = 1.$$

3 Lois finies usuelles

3.1 Variable aléatoire certaine

Définition (Variable aléatoire certaine).

Une variable aléatoire finie X est **certaine** si elle ne prend qu'une seule valeur a. On a alors

$$P(X = a) = 1.$$

Proposition (Espérance et variance d'une variable aléatoire certaine).

Si X est une variable aléatoire certaine telle que $X(\Omega) = \{a\}$, alors $E(X) = a$ et $V(X) = 0$.

Démonstration. $E(X) = aP(X = a) = a$, puis par théorème de transfert appliqué à la fonction $x \to (x - a)^2$:

$$V(X) = (a - a)^2 P(X = a) = 0^2 \times 1 = 0.$$

$\square$

Théorème (Variable aléatoire de variance nulle)**.**

Si X est une variable aléatoire finie de variance nulle, alors il existe un réel a pour lequel $P(X = a) = 1$.

Démonstration. (démonstration à connaître) On suppose que $V(X) = 0$. Par définition de la variance, $(X - E(X))^2$ est alors une variable aléatoire finie d'espérance nulle. Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, on a de plus par le théorème de transfert :

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - E(X))^2 P(X = x_k) = 0.$$

Or pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(x_k - E(X))^2 P(X = x_k) \geqslant 0$, donc les termes de la somme sont tous nuls.
Donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, soit $(x_k - E(X))^2 = 0$ (càd $x_k = E(X)$), soit $P(X = x_k) = 0$.
Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X = x_k) = 1$, il existe au moins un k_0 tel que $P(X = x_{k_0}) \neq 0$. Alors $x_{k_0} = E(X)$. Or $E(X)$ est une constante : $\forall k \neq k_0$, $x_k \neq E(X)$, cela signifie que $(x_k - E(X))^2 \neq 0$ et donc $P(X = x_k) = 0$. On en déduit bien :

$$P(X = x_{k_0}) = 1.$$

$\square$

3.2 Loi de Bernoulli

Définition (Loi de Bernoulli)**.**

Une variable aléatoire X suit la loi **de Bernoulli** de paramètre $p \in [0, 1]$ lorsque $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et

$$P(X = 1) = p.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Remarque. On a alors $P(X = 0) = 1 - p$.

Proposition (Espérance et variance d'une variable aléatoire de Bernoulli)**.**

Si X est une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$.

Démonstration.

$$E(X) = 1P(X = 1) + 0P(X = 0) = p,$$

$$\begin{aligned} V(X) &= (1 - E(X))^2 P(X = 1) + (0 - E(X))^2 P(X = 0) \\ &= (1 - p)^2 p + p^2 (1 - p) \\ &= p(1 - p)(1 - p + p) = p(1 - p). \end{aligned}$$

$\square$

Exemple 10. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Quelle est la loi de la variable aléatoire X^2 ?
X^2 ne peut prendre que les valeurs 0 et 1, et $P(X^2 = 1) = P(X = 1) = p$ comme X est à valeurs positives. Donc $X^2 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Définition (Variable indicatrice d'un événement)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable, et E un événement de Ω. La variable aléatoire finie X telle que

$$\begin{cases} X(\omega) & = & 1 & \text{si} & \omega \in E \\ X(\omega) & = & 0 & \text{si} & \omega \notin E \end{cases}$$

est appelée la **variable indicatrice de l'événement** E. On la note $\mathbb{1}_E$.

Exemple 11. On lance un dé. Soit A l'événement « tirer un numéro pair ». La variable aléatoire X qui vaut 1 si on tire un numéro pair et 0 sinon est la variable indicatrice de l'événement A.

Remarque. La variable indicatrice $\mathbb{1}_E$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(E)$.

3.3 Loi binomiale

Définition (Loi binomiale)**.**

Une variable aléatoire X suit la loi **binomiale** de paramètres $p \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ lorsque $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Démonstration. Il faut montrer que ces propriétés permettent bien de définir une variable aléatoire. $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \geqslant 0$ puisque $p \in [0, 1]$, de plus la formule du binôme de Newton donne :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1.$$

Il s'agit donc bien de la loi d'une variable aléatoire. $\square$

Remarque. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p) \Leftrightarrow X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Remarque. On considère une expérience qui se déroule en n épreuves indépendantes, ayant toutes une probabilité de succès p et une probabilité d'échec $1 - p$. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre total de succès dans les n épreuves. Déterminer la loi de X.
Il est immédiat que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Soit $k \in X(\Omega)$, $[X = k]$ correspond à l'événement « il y a exactement k succès ». On pose S_i l'événement « la i-ème épreuve est un succès ». Alors

$$P(X = k) = P\left(\bigcup_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ \mathrm{Card}(I) = k}} \left((\cap_{i \in I} S_i) \cap (\cap_{i \notin I} \overline{S_i}) \right) \right) = \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ \mathrm{Card}(I) = k}} P\left((\cap_{i \in I} S_i) \cap (\cap_{i \notin I} \overline{S_i}) \right),$$

où le passage à la somme se justifie par l'incompatibilité deux à deux des événements considérés. Comme de plus, les expériences sont indépendantes,

$$P(X=k) = \sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ \mathrm{Card}(I)=k}} \left((\prod_{i\in I} P(S_i))(\prod_{i\notin I} P(\overline{S_i})) \right) = \sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ \mathrm{Card}(I)=k}} p^k(1-p)^{n-k}.$$

Or, il y a $\binom{n}{k}$ événements élémentaires qui renvoient k succès (on choisit la position des k succès dans les n épreuves), donc autant de manières de choisir I. D'où $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$. On en déduit que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Proposition (Espérance et variance d'une variable aléatoire binomiale)**.**

Si X est une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \\
&= 0 + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} p^k(1-p)^{n-k} \\
&= n\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^{i+1}(1-p)^{n-1-i} && \text{en posant } i=k-1 \\
&= np\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^{i}(1-p)^{n-1-i} \\
&= np && \text{par formule du binôme de Newton,}
\end{aligned}$$

Pour la variance, la formule de Huygens donne :

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) - E(X)^2 \\
&= 0 + n\sum_{i=0}^{n-1} (i+1)\binom{n-1}{i} p^{i+1}(1-p)^{n-1-i} - (np)^2 && \text{en simplifiant } \binom{n}{k} \text{ puis en posant } i=k-1 \\
&= np\left(\sum_{i=0}^{n-1} i\binom{n-1}{i} p^{i}(1-p)^{n-1-i} + (p+1-p)^{n-1}\right) - (np)^2 && \text{par linéarité et binôme de Newton} \\
&= np\left(0 + \sum_{i=1}^{n-1} i\frac{n-1}{i}\binom{n-2}{i-1} p^{i}(1-p)^{n-1-i}\right) + np - (np)^2 \\
&= n(n-1)p^2\left(\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^{k}(1-p)^{n-2-k}\right) + np - (np)^2 && \text{en posant } k=i-1 \\
&= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 && \text{par binôme de Newton} \\
&= np(1-p)
\end{aligned}$$

Une preuve plus simple sera obtenue avec les résultats de l'an prochain, et l'espérance/variance d'une somme. □

3.4 Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$

Définition (Loi uniforme)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une variable aléatoire X suit la loi **uniforme** sur $[\![1,n]\!]$ lorsque $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$,

$$P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$.

Démonstration. Il faut montrer que ces propriétés permettent bien de définir une variable aléatoire. $\frac{1}{n} \geqslant 0$, de plus :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Il s'agit donc bien de la loi d'une variable aléatoire. □

Proposition (Espérance et variance d'une variable uniforme)**.**

Si X est une variable uniforme telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$, alors $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

Démonstration. Il suffit de faire le calcul :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2}.$$

On obtient ensuite avec Huygens :

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X = k) - E(X)^2 \\
&= \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{n+1}{2}\left(\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2}\right) \\
&= \frac{n+1}{2}\left(\frac{4n+2-3n-3}{6}\right) \\
&= \frac{n^2-1}{12}.
\end{aligned}$$

□

On peut généraliser la définition de la loi uniforme au cas d'un intervalle $[\![a,b]\!]$ où $(a,b) \in \mathbb{Z}$.

Définition (Loi uniforme généralisée)**.**

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$ lorsque $X(\Omega)=[\![a,b]\!]$ et $\forall k\in[\![a,b]\!]$,

$$P(X=k)=\frac{1}{b-a+1}.$$

On note alors $X\hookrightarrow\mathcal{U}([\![a,b]\!])$.

Démonstration. Il faut montrer que ces propriétés permettent bien de définir une variable aléatoire. On pourrait le faire à la main mais il est intéressant de remarquer qu'on peut se ramener par translation à une loi de type $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$, avec $n=b-a+1$ pour que le nombre de valeurs atteignables soit identique.
En effet, on peut écrire $X=(a-1)+Y$ avec $Y\hookrightarrow\mathcal{U}([\![1,b-a+1]\!])$. C'est donc bien une variable aléatoire. □

Proposition (Espérance et variance d'une variable uniforme généralisée)**.**

Si X est une variable uniforme telle que $X\hookrightarrow\mathcal{U}([\![a,b]\!])$, alors

$$E(X)=\frac{a+b}{2}\text{ et }V(X)=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}.$$

Démonstration. On peut utiliser le théorème de transfert, mais il y a plus simple en remarquant comme précédemment que $X=(a-1)+Y$ avec $Y\hookrightarrow\mathcal{U}([\![1,b-a+1]\!])$. Les formules d'espérance et variance d'une somme donnent donc :

$$E(X)=a-1+E(Y)=a-1+\frac{b-a+2}{2}=\frac{a+b}{2},$$

$$V(X)=V(Y)=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}.$$

□