Variables aléatoires

Cours de É. Bouchet – PCSI

2 mai 2024

Table des matières

1 Variables aléatoires

1.1 Définition et notations

Définition 1.1 (Variable aléatoire)

Soit Ω un univers fini. On appelle **variable aléatoire** toute application définie de Ω vers un ensemble E. Si X est une variable aléatoire, on note $X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.

Remarque. Puisque Ω est un univers fini, $X(\Omega)$ est un ensemble fini. On parle alors de variable aléatoire finie.

Exemple. On lance n fois une pièce équilibrée, en notant 1 pour face et 0 pour pile. Alors $\Omega = \{0,1\}^n$.

1. Soit X_1 la fonction qui à un tirage associe 1 si le premier lancer donne face, 0 sinon. C'est une variable aléatoire et $X_1(\Omega) = \{0,1\}$.
2. Soit X_2 la fonction qui à un tirage associe le nombre de face. C'est une variable aléatoire et $X_2(\Omega) = [\![0,n]\!]$.
3. Soit X_3 la fonction qui à un tirage associe le rang d'apparition du premier pile, s'il existe, et 0 sinon. C'est une variable aléatoire et $X_3(\Omega) = [\![0,n]\!]$.

Remarque. On utilise des notations entre parenthèses ou accolades pour désigner les événements associés à une variable aléatoire X. Par exemple,

L'événement « X prend la valeur x » est noté $\{X = x\}$ ou $(X = x)$.

L'événement « X prend une valeur inférieure à x » est noté $\{X \leqslant x\}$ ou $(X \leqslant x)$.

L'événement « X prend une valeur de l'ensemble A » est noté $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$.

À l'intérieur d'une probabilité, on s'autorise pour des raisons de lisibilité à retirer les accolades ou parenthèses supplémentaires. On peut donc écrire $P(X = x)$ en lieu et place de $P(\{X = x\})$ ou $P((X = x))$.

Proposition 1.2 (Système complet d'événements lié à une variable aléatoire)

Soit X une variable aléatoire finie, alors $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

Démonstration. Si x et y sont deux éléments distincts de $X(\Omega)$, $\{X = x\}$ et $\{X = y\}$ sont incompatibles (la fonction X ne peut pas prendre deux valeurs différentes en même temps), et :

$$\bigcup_{x \in X(\Omega)} \{X = x\} = \{X \in X(\Omega)\} = \Omega.$$

Donc $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. □

Exemple. On reprend la variable aléatoire X_1 de l'exemple précédent. Alors $(\{X_1 = 0\}, \{X_1 = 1\})$ est un système complet d'événements, qui correspond à la disjonction de cas « le premier lancer donne pile » et « le premier lancer donne face ».

1.2 Loi d'une variable aléatoire

Définition 1.3 (Loi d'une variable aléatoire)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et X une variable aléatoire, on appelle **loi de** X l'application P_X définie de $\mathcal{P}(X(\Omega))$ dans $[0,1]$ par :

$$\forall A \subset X(\Omega), \quad P_X(A) = P(X \in A).$$

Proposition 1.4 (La loi d'une variable aléatoire est une probabilité)

Soit X une variable aléatoire, l'application P_X est une probabilité sur $X(\Omega)$.

Démonstration. On revient à la définition :

— Soit $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$, $P_X(A) = P(X = A) \in [0, 1]$.
— $P_X(X(\Omega)) = P(X \in X(\Omega)) = 1$ par définition de $X(\Omega)$.
— Soit A et B dans $\mathcal{P}(X(\Omega))$, qu'on suppose incompatibles. Se ramener à une nouvelle union incompatible donne alors,

$$P_X(A \cup B) = P(X \in A \cup B) = P(\{X \in A\} \cup \{X \in B\}) = P(X \in A) + P(X \in B) = P_X(A) + P_X(B).$$

D'où le résultat annoncé. $\square$

Remarque. Comme P_X est une probabilité, elle est entièrement déterminée par sa distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$. En particulier, pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$, $P_X(A) = P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x)$.

Remarque. Soit X et Y deux variables aléatoires. On note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$.

Exercice 1. On lance une pièce équilibrée, et on définit la variable aléatoire Z comme valant 0 si la pièce donne face, et 1 sinon. Déterminer la loi de Z.
Solution : La loi de Z est : $Z(\Omega) = \{0, 1\}$, $P(Z = 1) = \frac{1}{2}$, $P(Z = 0) = \frac{1}{2}$.

Exercice 2. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la n-liste $(u_1, \ldots, u_n)$ définie pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ par $u_i = \alpha \times i$. Cette n-liste définit-elle une loi d'une variable aléatoire réelle ?
Solution : Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $u_i \geqslant 0$ si et seulement si $\alpha \geqslant 0$. Par ailleurs, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha i = \alpha \sum_{i=1}^{n} i = \alpha \frac{n(n+1)}{2},$$

ce qui est égal à 1 ssi $\alpha = \frac{2}{n(n+1)}$. Cette valeur étant positive, la liste définit une loi de variable aléatoire finie si et seulement si $\alpha = \frac{2}{n(n+1)}$.

Proposition 1.5 (Variable aléatoire $g(X)$)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble E et g une fonction définie sur E. La fonction $g(X)$ est également une variable aléatoire et pour tout $A \in \mathcal{P}(g(X(\Omega)))$,

$$P_{g(X)}(A) = P(g(X) \in A) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ g(x) \in A}} P(X = x).$$

Démonstration. La fonction $g \circ X$ est définie sur Ω (car $X(\Omega) \subset E$) donc c'est une variable aléatoire. De plus, si $A \in \mathcal{P}(g(X(\Omega)))$, une décomposition selon le système complet d'événements $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$ donne :

$$\begin{aligned}
P(g(X) \in A) &= P\left(\bigcup_{x \in X(\Omega)} (\{X = x\} \cap \{g(X) \in A\})\right) && \\
&= P\left(\bigcup_{x \in X(\Omega)} (\{X = x\} \cap \{g(x) \in A\})\right) && \text{car dans l'intersection, } X \text{ est fixé} \\
&= P\left(\bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ g(x) \in A}} \{X = x\}\right) && \text{en regroupant les termes} \\
P(g(X) \in A) &= \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ g(x) \in A}} P(X = x) && \text{par incompatibilité des } \{X = x\}.
\end{aligned}$$

$\square$

Remarque. En particulier, si X et Y sont deux variables aléatoires telles que $X \sim Y$, et si la composition par g est bien définie, $g(X) \sim g(Y)$.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$, $P(X = -1) = \frac{4}{9}$, $P(X = 1) = \frac{4}{9}$ et $P(X = 2) = \frac{1}{9}$. On pose $Y = X^2$, déterminer la loi de Y.
Solution : On trouve directement que $Y(\Omega) = \{1, 4\}$, puis :

$$P(Y = 1) = P(X = 1) + P(X = -1) = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9} \quad \text{et} \quad P(Y = 4) = P(X = 2) = \frac{1}{9}.$$

1.3 Variables aléatoires usuelles

Définition 1.6 (Loi uniforme)

Soit E un ensemble fini non vide. Une variable aléatoire X suit la loi **uniforme** sur E, ce qu'on note $X \sim \mathcal{U}(E)$, lorsque P_X est la probabilité uniforme sur E, c'est-à-dire :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad P_X(A) = P(X \in A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(E)}.$$

Remarque. Si $X \sim \mathcal{U}(E)$, on a en particulier $X(\Omega) = E$ et $\forall k \in E$, $P(X = k) = \frac{1}{\mathrm{Card}(E)}$.

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on effectue un tirage dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à n. Soit X le numéro de la boule tirée, alors $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

Définition 1.7 (Loi de Bernoulli)

Une variable aléatoire X suit la loi **de Bernoulli** de paramètre $p \in [0, 1]$, ce qu'on note $X \sim \mathcal{B}(p)$, lorsque :

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \quad \text{et} \quad P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p.$$

Remarque. On interprète souvent un tirage de variable de Bernoulli comme le résultat d'une expérience, avec la convention que $\{X = 1\}$ représente un succès et $\{X = 0\}$ un échec.

Exercice 4. On suppose que $X \sim \mathcal{B}(p)$. Quelle est la loi de la variable aléatoire X^2 ?
Solution : $X^2(\Omega) = \{0, 1\}$. De plus, comme X est à valeurs positives, $P(X^2 = 1) = P(X = 1) = p$ et $P(X^2 = 0) = P(X = 0) = 1 - p$. Donc $X^2 \sim \mathcal{B}(p)$.

Définition 1.8 (Variable indicatrice d'un événement)

Soit Ω un univers fini et $E \in \mathcal{P}(\Omega)$. La variable aléatoire X définie par $\begin{cases} X = 1 \text{ si } E \text{ est réalisé} \\ X = 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est appelée la **variable indicatrice de l'événement** E. On la note $\mathbb{1}_E$.

Exemple. On lance un dé. Soit A l'événement « tirer un numéro pair ». La variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ vaut 1 si on tire un numéro pair et 0 sinon.

Remarque. La variable indicatrice $\mathbb{1}_E$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(E)$.

Définition 1.9 (Loi binomiale)

Une variable aléatoire X suit la loi **binomiale** de paramètres $p \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, ce qu'on note, $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, lorsque :

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Démonstration. $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \geqslant 0$ puisque $p \in [0,1]$. De plus la formule du binôme de Newton donne :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p+1-p)^n = 1.$$

Ces valeurs permettent donc bien de définir une distribution de probabilités. □

Remarque. $X \sim \mathcal{B}(1,p) \Leftrightarrow X \sim \mathcal{B}(p)$.
On proposera une interprétation du cas général $\mathcal{B}(n,p)$ dans la suite du chapitre, quand on aura défini la notion d'indépendance pour des variables aléatoires.

1.4 Loi conditionnelle

Définition 1.10 (Loi conditionnelle d'une variable aléatoire)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $P(A) > 0$.
On appelle **loi conditionnelle de X sachant** A la loi de X pour la probabilité P_A, c'est-à-dire l'application de $\mathcal{P}(X(\Omega))$ dans $[0,1]$ qui à $B \subset X(\Omega)$ associe $P_A(X \in B)$.

Remarque. La loi conditionnelle de X sachant A est entièrement déterminée par la distribution de probabilités $(P_A(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit un entier X au hasard entre 1 et $2n$. Quelle est la loi de X sachant $\{X \leqslant n\}$?
<u>Solution :</u> On sait que $X \sim \mathcal{U}([\![1,2n]\!])$, donc $P(X \leqslant n) = \frac{\mathrm{Card}([\![1,n]\!])}{\mathrm{Card}([\![1,2n]\!])} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. De plus :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad P_{\{X \leqslant n\}}(X = k) = \frac{P(X = k)}{P(X \leqslant n)} = \frac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![n+1,2n]\!], \quad P_{\{X \leqslant n\}}(X = k) = 0.$$

La loi de X sachant $\{X \leqslant n\}$ est donc une loi $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$.

2 Couples de variables aléatoires

Définition 2.1 (Couple de variables aléatoires)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. On appelle **couple de variables aléatoires** toute variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans un produit.

Exemple. Soit X, Y deux variables aléatoires. L'application Z définie sur Ω par $\omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega))$ est un couple de variables aléatoires. On note $Z = (X, Y)$.

Définition 2.2 (Loi conjointe, lois marginales)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et X, Y deux variables aléatoires sur Ω.
- On appelle **loi conjointe de X et Y** la loi $P_{(X,Y)}$ du couple de variables aléatoires (X, Y).
- On appelle **première loi marginale** de (X, Y) la loi P_X de la variable aléatoire X, et **deuxième loi marginale** la loi P_Y de la variable aléatoire Y.

Remarque. Ces définitions et leurs propriétés s'étendent sans difficultés à des n-uplets de variables aléatoires.

Remarque. On a $(X,Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Pour déterminer la loi conjointe d'un couple, on peut ainsi se contenter d'étudier la distribution de probabilités $(P(X = x \text{ et } Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$.
Attention quand même : dans le cas général, il n'y a pas égalité entre $(X,Y)(\Omega)$ et $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Remarque. Pour alléger les notations, on note souvent $P(X = x, Y = y)$ à la place de $P(X = x \text{ et } Y = y)$.

Exercice 6. On lance deux dés. On note X le plus grand des deux chiffres obtenus et Y le plus petit. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).

Solution : On a $X(\Omega) = [\![1,6]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1,6]\!]$, donc $(X,Y)(\Omega) \subset [\![1,6]\!]^2$. Soit $(i,j) \in [\![1,6]\!]^2$,

- Si $i < j$, $P(X = i, Y = j) = 0$ (le plus grand nombre ne peut pas être strictement inférieur au plus petit).
- Si $i = j$, $P(X = i, Y = j) = \frac{\text{Card}(\{(i,i)\})}{\text{Card}([\![1,6]\!]^2)} = \frac{1}{36}$.
- Si $i > j$, $P(X = i, Y = j) = \frac{\text{Card}(\{(i,j),(j,i)\})}{\text{Card}([\![1,6]\!]^2)} = \frac{2}{36}$.

On peut résumer ces résultats dans un tableau :

$P(X = i, Y = j)$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

Les éléments du tableau doivent se sommer à 1, puisque $(\{X = i, Y = j\})_{i \in X(\Omega), j \in Y(\Omega)}$ donne le système complet d'événements associé au couple (X, Y). Cela permet de vérifier la cohérence du résultat obtenu.

Exercice 7. Une urne contient 3 boules blanches, 4 boules vertes et 5 boules bleues. On tire simultanément 3 boules dans l'urne. Parmi les boules ainsi obtenues, on note X le nombre de boules blanches et Y le nombre de boules vertes. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).

Solution : On trouve $X(\Omega) = [\![0,3]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0,3]\!]$, donc $(X,Y)(\Omega) \subset [\![0,3]\!]^2$.

Soit $(i,j) \in [\![0,3]\!]^2$. Alors $P(X = i, Y = j) = \dfrac{\text{Card}(\{X = i, Y = j\})}{\text{Card}(\Omega)}$. Un tirage de 3 boules dans une urne en contenant 12 est une partie à 3 éléments d'un ensemble à 12 éléments, donc $\text{Card}(\Omega) = \binom{12}{3}$.

De plus, pour réaliser $\{X = i, Y = j\}$, il faut :

- choisir les i boules blanches tirées : $\binom{3}{i}$ possibilités.
- choisir les j boules vertes tirées : $\binom{4}{j}$ possibilités.
- choisir les $3 - i - j$ boules bleues : $\binom{5}{3-i-j}$ possibilités.

Donc $\text{Card}(\{X = i, Y = j\}) = \binom{3}{i}\binom{4}{j}\binom{5}{3-i-j}$. On en déduit :

$$\forall (i,j) \in [\![0,3]\!]^2, \quad P(X = i, Y = j) = \frac{\binom{3}{i}\binom{4}{j}\binom{5}{3-i-j}}{\binom{12}{3}}.$$

Proposition 2.3 (Calcul des lois marginales à partir de la loi conjointe)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et X, Y deux variables aléatoires sur Ω. La loi conjointe $P_{(X,Y)}$ du couple (X, Y) détermine entièrement ses lois marginales P_X et P_Y. Plus précisément,

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y),$$

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y).$$

Remarque. Dans le cas général, il n'est par contre pas possible d'obtenir la loi conjointe à partir des lois marginales.

Démonstration. La première égalité se montre en appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(\{Y = y\})_{y \in Y(\Omega)}$:

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y).$$

La deuxième égalité se montre de même en appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$. □

Remarque. Si la loi du couple est résumée dans un tableau à double entrée, les lois marginales s'obtiennent donc en sommant les éléments de chaque ligne ou de chaque colonne.

Exercice 8. On se place de nouveau dans le contexte de l'exercice 6. Déterminer les lois marginales de X et Y.
<u>Solution :</u> Il suffit de réutiliser le tableau à double entrée, qui donne en sommant en ligne ou en colonnes :

$$\forall k \in [\![1, 6]\!], \quad P(X = k) = \frac{1 + 2(k-1)}{36} = \frac{2k-1}{36}, \qquad \forall k \in [\![1, 6]\!], \quad P(Y = k) = \frac{1 + 2(6-k)}{36} = \frac{13-2k}{36}.$$

3 Indépendance de variables aléatoires

3.1 Définition et premières propriétés

Définition 3.1 (Indépendance de deux variables aléatoires)

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers Ω. On dit qu'elles sont **indépendantes** et on note $X \perp\!\!\!\perp Y$ lorsque pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$ et tout $B \in \mathcal{P}(Y(\Omega))$, les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendants.

Proposition 3.2 (Distribution de probabilités d'un couple de variables indépendantes)

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers Ω. Elles sont indépendantes si et seulement si la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Démonstration.

— On suppose que X et Y sont indépendantes. Alors par définition de l'indépendance de deux événements,

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P(X = x, Y = y) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(X = x)P(Y = y).$$

— Réciproquement, on suppose que la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par la relation annoncée. Soit $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$ et $B \in \mathcal{P}(Y(\Omega))$,

$$\begin{aligned} P(X \in A)P(Y \in B) &= \left(\sum_{x \in A} P(X = x)\right)\left(\sum_{y \in B} P(Y = y)\right) \\ &= \sum_{(x,y) \in A \times B} P(X = x)P(Y = y) \\ &= \sum_{(x,y) \in A \times B} P(X = x, Y = y) \\ &= P\left(\bigcup_{(x,y) \in A \times B} \{X = x, Y = y\}\right) \\ P(X \in A)P(Y \in B) &= P(\{X \in A)\} \cap \{Y \in B\}), \end{aligned}$$

où on a utilisé les propriétés des unions incompatibles. Donc $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendants, donc X et Y sont indépendantes.

□

Remarque. Dans le cas où X et Y sont des variables aléatoires indépendantes (et dans ce cas seulement), on peut donc déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) à partir des deux lois marginales.

Exemple. On tire deux dés et on note X le résultat du premier dé, Y celui du deuxième dé. Les variables aléatoires X et Y sont alors indépendantes. En particulier,

$$\forall (i,j) \in [\![1,6]\!]^2, \quad P(X=i, Y=j) = P(X=i)P(Y=j) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Remarque. Pour montrer que deux variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$ tels que $P(X=x, Y=y) \neq P(X=x)P(Y=y)$.
Souvent, on cherche $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$ tels que $P(X=x, Y=y) = 0$ et $P(X=x) \neq 0$, $P(Y=y) \neq 0$ (c'est-à-dire on cherche s'il y a des zéros dans le tableau de la loi conjointe).

Exercice 9. On tire deux dés simultanément. On note X la somme des deux dés et Y leur produit, montrer que X et Y ne sont pas des variables aléatoires indépendantes.
Solution : L'équiprobabilité donne :

$$P(X=2) = \frac{\text{Card}\,\{(1,1)\}}{\text{Card}\,[\![1,6]\!]^2} = \frac{1}{36}, \quad \text{et} \quad P(Y=36) = \frac{\text{Card}\,\{(6,6)\}}{\text{Card}\,[\![1,6]\!]^2} = \frac{1}{36}.$$

Or $P(X=2, Y=36) = 0$ puisque si la somme des deux dés fait 2, le produit fait 1, pas 36.
Donc $P(X=2, Y=36) \neq P(X=2)P(Y=36)$ et X et Y ne sont pas indépendantes.

Définition 3.3 (Indépendance d'un n-uplet de variables aléatoires)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1,…,X_n des variables aléatoires définies sur un univers Ω. On dit qu'elles sont **(mutuellement) indépendantes** lorsque pour tout $(A_1, \ldots, A_n)$ avec $A_i \in \mathcal{P}(X_i(\Omega))$, les événements $(\{X_i \in A_i\})_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont (mutuellement) indépendants.

Remarque. Comme dans le cas d'un couple, cela équivaut à vérifier que la distribution de probabilités de $(X_1, \ldots, X_n)$ est donnée par :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega), \quad P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \ldots P(X_n = x_n).$$

Remarque. Les n-uplets de variables aléatoires sont souvent utilisés pour modéliser une succession de n expériences aléatoires indépendantes. On utilise alors une suite finie $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de variables aléatoires indépendantes, où X_i donne une information sur le résultat de la i-ème expérience.

3.2 Lemme des coalitions

Proposition 3.4 (Indépendance et composition)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur Ω. Soit f et g deux fonctions définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ respectivement. Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont des variables aléatoires indépendantes.

Démonstration. Soit $a \in f(X(\Omega))$ et $b \in g(Y(\Omega))$. Alors,

$$\begin{aligned}
P(f(X)=a, g(Y)=b) &= P(\{f(X)=a\} \cap \{g(Y)=b\}) \\
&= P(\{X \in f^{-1}(\{a\})\} \cap \{Y \in g^{-1}(\{b\})\}) \\
&= P(X \in f^{-1}(\{a\}))P(Y \in g^{-1}(\{b\})) \qquad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\
P(f(X)=a, g(Y)=b) &= P(f(X)=a)P(g(Y)=b).
\end{aligned}$$

Donc $f(X)$ et $g(Y)$ sont des variables aléatoires indépendantes. □

Proposition 3.5 (Lemme des coalitions)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, …, X_n des variables aléatoires indépendantes.
Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$, f une fonction définie sur $X_1(\Omega) \times \ldots \times X_p(\Omega)$ et g une fonction définie sur $X_{p+1}(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$. Alors $f(X_1, \ldots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ sont des variables aléatoires indépendantes.

Démonstration. Hors-programme. □

Remarque. Ce résultat reste valable dans le cas de plus de deux coalitions.

Exemple. Si X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont des variables aléatoires indépendantes, le lemme des coalitions donne que les variables $X_1 - X_2 + 2X_4^2$ et $X_3 - X_5^2$ sont indépendantes.

Exemple. Soit X et Y deux variables aléatoires. Si X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes, alors par contraposée du lemme des coalitions X et Y ne le sont pas non plus.

3.3 Retour sur les variables aléatoires binomiales

Proposition 3.6 (Somme de lois de Bernoulli)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$ et X_1, ..., X_n des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$. Alors :

$$X_1 + \ldots + X_n \sim \mathcal{B}(n,p).$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H(n)$: « si X_1, ..., X_n sont des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1 + \ldots + X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$ ».

— Soit X_1 une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(p)$. On a déjà vu qu'alors, $X_1 \sim \mathcal{B}(1,p)$, donc $H(1)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $H(n)$ est vraie. Soit X_1, ..., X_{n+1} des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$. On pose $Y = X_1 + \ldots + X_n$. D'après $H(n)$, $Y \sim \mathcal{B}(n,p)$ et d'après le lemme des coalitions, Y et X_{n+1} sont des variables aléatoires indépendantes. Soit $k \in [\![0, n+1]\!]$, appliquer la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(\{X_{n+1} = 1\}, \{X_{n+1} = 0\})$ donne donc :

$$\begin{aligned} P(Y + X_{n+1} = k) &= P(\{X_{n+1} = 1\} \cap \{Y + X_{n+1} = k\}) + P(\{X_{n+1} = 0\} \cap \{Y + X_{n+1} = k\}) \\ &= P(\{X_{n+1} = 1\} \cap \{Y = k-1\}) + P(\{X_{n+1} = 0\} \cap \{Y = k\}) \\ &= P(X_{n+1} = 1)P(Y = k-1) + P(X_{n+1} = 0)P(Y = k) \\ &= p\binom{n}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-(k-1)} + (1-p)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) p^k(1-p)^{n-k+1} \\ P(Y + X_{n+1} = k) &= \binom{n+1}{k}p^k(1-p)^{n+1-k}, \end{aligned}$$

où on a appliqué les formules de loi binomiale (qui restent vraies même dans le cas où les probabilités sont nulles grâce aux propriétés des coefficients binomiaux), puis conclu par la formule de Pascal. Donc $Y + X_{n+1} \sim \mathcal{B}(n+1,p)$, donc $H(n+1)$ est vraie.

Cela montre donc le résultat annoncé. □

Remarque. Cette méthode d'étude d'une fonction de plusieurs variables aléatoires par l'utilisation de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements engendré par une des variables est classique.

Remarque. On savait déjà qu'un résultat de loi de Bernoulli pouvait s'interpréter comme la survenue ou non d'un succès (de probabilité p) lors d'une expérience.
Un résultat de loi binomiale peut donc s'interpréter comme le nombre de succès obtenus lors de la répétition de n expériences indépendantes, ayant chacune la probabilité p de succès.

Exercice 10. On effectue 10 lancers de dé et on pose X le nombre de lancers ayant renvoyé 1 ou 6. Déterminer la loi de X.
Solution : X compte le nombre de succès (« renvoyer 1 ou 6 »), de probabilité $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, dans une succession de 10 tirages indépendants. Donc $X \sim \mathcal{B}(10, \frac{1}{3})$.

Exercice 11 (Variante facultative sur l'interprétation de la loi binomiale, basée uniquement sur le dénombrement)**.** On considère une expérience qui se déroule en n épreuves indépendantes, ayant toutes une probabilité de succès p et une probabilité d'échec $1-p$. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre total de succès dans les n épreuves. Déterminer la loi de X.
Solution : Il est immédiat que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Soit $k \in X(\Omega)$, $\{X = k\}$ correspond à l'événement « il y a exactement k succès ». On pose S_i l'événement « la i-ème épreuve est un succès ». Alors

$$P(X=k) = P\left(\bigcup_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ \mathrm{Card}(I)=k}} \left((\cap_{i\in I} S_i) \cap (\cap_{i\notin I}\overline{S_i})\right)\right) = \sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ \mathrm{Card}(I)=k}} P\left((\cap_{i\in I} S_i) \cap (\cap_{i\notin I}\overline{S_i})\right),$$

où le passage à la somme se justifie par l'incompatibilité deux à deux des événements considérés. Comme de plus, les expériences sont indépendantes,

$$P(X=k) = \sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ \mathrm{Card}(I)=k}} \left((\prod_{i\in I} P(S_i))(\prod_{i\notin I} P(\overline{S_i}))\right) = \sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ \mathrm{Card}(I)=k}} p^k(1-p)^{n-k}.$$

Or, il y a $\binom{n}{k}$ événements élémentaires qui renvoient k succès (on choisit la position des k succès dans les n épreuves), donc autant de manières de choisir I. D'où $P(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. On en déduit que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.