Comparaisons de fonctions

Cours de É. Bouchet – ECS1

12 avril 2019

Table des matières

Dans tout le chapitre, on notera $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble constitué de $\mathbb{R}$, $+\infty$ et $-\infty$.

1 Fonctions équivalentes

1.1 Définition et première caractérisation

Définition (Fonctions équivalentes au voisinage d'un point)**.**

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, et f et g deux fonctions à valeurs réelles, définies sur un voisinage V_{x_0} de x_0. On dit que f et g sont **équivalentes au voisinage de** x_0 lorsqu'il existe une fonction φ définie sur V_{x_0} telle que $\forall x \in V_{x_0}$, $f(x) = g(x)\varphi(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$. On note alors $f(x) \sim_{x_0} g(x)$.

Proposition.

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, et f et g deux fonctions à valeurs réelles, définies sur un voisinage V_{x_0} de x_0. Si g ne s'annule pas sur V_{x_0}, alors :

$$f(x) \sim_{x_0} g(x) \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Démonstration. (démonstration à connaître) Soit V_{x_0} tel que $\forall x \in V_{x_0}$, $g(x) \neq 0$.

— Si $f(x) \sim_{x_0} g(x)$, alors il existe φ telle que $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$ et un voisinage V'_{x_0} de x_0 tels que $\forall x \in V'_{x_0}$, $f(x) = g(x)\varphi(x)$. Donc pour tout $x \in V_{x_0} \cap V'_{x_0}$, $\frac{f(x)}{g(x)} = \varphi(x)$, ce qui donne :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 1.$$

— Réciproquement, on suppose que $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Soit φ la fonction définie sur V_{x_0} par $\forall x \in V_{x_0}$, $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Par construction, $\forall x \in V_{x_0}$, $f(x) = g(x)\varphi(x)$, et

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Donc $f(x) \sim_{x_0} g(x)$.

$\square$

1.2 Propriétés

L'ensemble des résultats qui suivent se montrent en revenant à la définition, de même que dans le cas des suites.

Proposition (Transitivité des équivalents)**.**

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, et f, g et h trois fonctions à valeurs réelles, définies sur un voisinage V_{x_0} de x_0. Si $f(x) \sim_{x_0} g(x)$ et $g(x) \sim_{x_0} h(x)$ alors $f(x) \sim_{x_0} h(x)$.

Proposition (Équivalents et limites).

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, et f et g deux fonctions à valeurs réelles, définies sur un voisinage V_{x_0} de x_0.

- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$, alors $f(x) \sim_{x_0} \ell$.
- Si $f(x) \sim_{x_0} g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ existe, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe et ces deux limites sont égales.

Proposition (Équivalents et signe de la fonction).

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, et f et g deux fonctions à valeurs réelles, définies sur un voisinage V_{x_0} de x_0.

- Si $f(x) \sim_{x_0} g(x)$ et si f ne s'annule pas au voisinage de x_0 alors g non plus.
- Si $f(x) \sim_{x_0} g(x)$ et si f est positive au voisinage de x_0, alors g l'est également.

Proposition (Produit et quotient d'équivalents).

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, et f_1, f_2, g_1, g_2 des fonctions à valeurs réelles, définies sur un voisinage V_{x_0} de x_0. Si $f_1(x) \sim_{x_0} g_1(x)$ et si $f_2(x) \sim_{x_0} g_2(x)$ alors $(f_1 f_2)(x) \sim_{x_0} (g_1 g_2)(x)$.
Si de plus g_2 ne s'annule pas au voisinage de x_0, alors $\dfrac{f_1}{f_2}(x) \sim_{x_0} \dfrac{g_1}{g_2}(x)$.

Proposition (Équivalents et passage à la valeur absolue).

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, et f et g deux fonctions à valeurs réelles, définies sur un voisinage V_{x_0} de x_0. Si $f(x) \sim_{x_0} g(x)$ alors $|f(x)| \sim_{x_0} |g(x)|$.

Proposition (Équivalents et passage à la puissance).

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, et f et g deux fonctions à valeurs réelles, définies sur un voisinage V_{x_0} de x_0. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $f(x) \sim_{x_0} g(x)$ alors $f^\alpha(x) \sim_{x_0} g^\alpha(x)$ dès que les puissances sont bien définies.

Remarque. ATTENTION ! Toute autre opération est interdite, notamment la composition d'un équivalent par une fonction et la somme d'équivalents.

1.3 Équivalents usuels

Formule (Équivalents usuels au voisinage de zéro).

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ fixé,

$$\ln(1+x) \sim_0 x, \quad e^x - 1 \sim_0 x, \quad \sin x \sim_0 x, \quad \cos x - 1 \sim_0 -\frac{1}{2}x^2, \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x.$$

Exemple 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{\sin(2x)}{x^2}$. Déterminer un équivalent de f au voisinage de 0.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$, les équivalents précédents donnent $\sin(2x) \sim_0 2x$. En divisant par x^2 qui ne s'annule pas au voisinage de 0, on trouve

$$\frac{\sin(2x)}{x^2} \sim_0 \frac{2}{x}.$$

Exemple 2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Déterminer un équivalent de g au voisinage de $+\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, les équivalents précédents donnent directement $g(x) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{x}$.

2 Fonction négligeable devant une autre fonction

2.1 Définition et première caractérisation

Définition (Fonction négligeable devant une autre fonction)**.**

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, et f, g deux fonctions à valeurs réelles, définies sur un voisinage V_{x_0} de x_0. On dit que f est **négligeable devant** g au voisinage de x_0 lorsqu'il existe une fonction ε définie sur V_{x_0} telle que $\forall x \in V_{x_0}$, $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ et que $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$. On note alors $f(x) =_{x_0} o(g(x))$

Proposition.

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, et f, g deux fonctions à valeurs réelles, définies sur un voisinage V_{x_0} de x_0. Si g ne s'annule pas sur V_{x_0}, alors

$$f(x) =_{x_0} o(g(x)) \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Démonstration. (démonstration à connaître) Soit V_{x_0} tel que $\forall x \in V_{x_0}$, $g(x) \neq 0$.

— Si $f(x) =_{x_0} o(g(x))$, alors il existe une fonction ε telle que $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$ et un voisinage V'_{x_0} de x_0 tels que $\forall x \in V'_{x_0}$, $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$. Donc pour $x \in V_{x_0} \cap V'_{x_0}$, $\frac{f(x)}{g(x)} = \varepsilon(x)$, ce qui donne :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

— Réciproquement, on suppose que $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Soit ε la fonction définie pour tout $x \in V_{x_0}$ par $\varepsilon(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Par construction, $\forall x \in V_{x_0}$, $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$, et

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Donc $f(x) =_{x_0} o(g(x))$.

$\square$

2.2 Propriétés

Les résultats qui suivent se montrent en revenant à la définition, de même que dans le cas des suites.

Théorème (Relation entre équivalence et négligeabilité).

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g deux fonctions à valeurs réelles, définies sur un voisinage V_{x_0} de x_0. Alors :
- $f(x) \sim_{x_0} g(x) \Longleftrightarrow (f-g)(x) =_{x_0} o(g(x))$.
- Si $f(x) =_{x_0} o(g(x))$ et si $g(x) \sim_{x_0} h(x)$ alors $f(x) =_{x_0} o(h(x))$.

Proposition (Transitivité des fonctions négligeables).

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g et h trois fonctions à valeurs réelles, définies sur un voisinage V_{x_0} de x_0.
Si $f(x) =_{x_0} o(g(x))$ et si $g(x) =_{x_0} o(h(x))$ alors $f(x) =_{x_0} o(h(x))$.

Proposition (Fonction négligeable devant 1).

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction à valeurs réelles, définie sur un voisinage V_{x_0} de x_0. Si $f(x) =_{x_0} o(1)$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Proposition (Somme et produit de fonctions négligeables).

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et f_1, f_2, g_1, g_2 des fonctions à valeurs réelles, définies sur un voisinage V_{x_0} de x_0.

Si $f_1(x) =_{x_0} o(g_1(x))$ et si $f_2(x) =_{x_0} o(g_1(x))$ alors $(f_1 + f_2)(x) =_{x_0} o(g_1(x))$.

Si $f_1(x) =_{x_0} o(g_1(x))$ et si $f_2(x) =_{x_0} o(g_2(x))$ alors $f_1 f_2(x) =_{x_0} o(g_1 g_2(x))$.

Proposition (Fonctions négligeables et passage à la valeur absolue).

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et f et g deux fonctions à valeurs réelles, définies sur un voisinage V_{x_0} de x_0. On suppose que $f(x) =_{x_0} o(g(x))$. Alors $|f|(x) =_{x_0} o(|g|(x))$.

Proposition (Fonctions négligeables et passage à la puissance).

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et f et g deux fonctions à valeurs réelles, définies sur un voisinage V_{x_0} de x_0. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Si $f(x) =_{x_0} o(g(x))$ alors $f^\alpha(x) =_{x_0} o(g^\alpha(x))$ (à condition que les puissances soient bien définies).

2.3 Négligeabilités classiques

Formule (Négligeabilités classiques)**.**

$$\begin{array}{rlll} x^\alpha & =_{+\infty} & o(x^\beta) & \text{lorsque } \alpha < \beta, \\ x^\beta & =_0 & o(x^\alpha) & \text{lorsque } \alpha < \beta, \\ (\ln x)^\beta & =_{+\infty} & o(x^\alpha) & \text{lorsque } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0, \\ (\ln |x|)^\beta & =_0 & o(\frac{1}{x^\alpha}) & \text{lorsque } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0, \\ x^\alpha & =_{+\infty} & o(a^x) & \text{lorsque } \alpha > 0 \text{ et } a > 1, \\ a^x & =_{+\infty} & o(b^x) & \text{lorsque } |a| < |b|. \end{array}$$

Exemple 3. Pour α réel et $\beta > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty \text{ par croissances comparées.}$$

Exemple 4. Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0 \text{ par croissances comparées.}$$

Exemple 5. Pour $\alpha > 0$ et β réel,

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha (\ln x)^\beta = 0.$$

C'est également une croissance comparée, un peu déguisée. En effet,

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha (\ln x)^\beta \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{(-\ln(y))^\beta}{y^\alpha} = 0.$$