TP10 : évaluation

Ces exercices sont à rédiger sur une feuille au propre et à rendre avant de quitter la salle. Vous êtes grandement incités à utiliser Scilab pour tester vos réponses.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et f une fonction continue sur $[a,b]$. On cherche à calculer de manière approchée l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

La méthode de Monte Carlo consiste à tirer N variables aléatoires uniformes sur $[a,b]$, que l'on note x_i, $i \in [\![1,N]\!]$. On approche alors l'intégrale par la valeur :

$$S_N = \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i).$$

Le cours de l'an prochain (version générale de la loi faible des grands nombres) vous assurera que S_N converge en probabilité vers I quand N tend vers l'infini.

Exercice 1. Écrire une fonction `MonteCarlo` qui prend en argument la valeur N, et qui renvoie l'approximation de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ par la méthode de Monte Carlo.

Exercice 2. Effectuer trois tirages dans le cas $N = 1\ 000$ et noter leurs résultats. Comparer avec une valeur approchée de $\arctan(1)$.

Exercice 3. On considère les lignes de commande suivantes :

```
N = 1000
n = 20
for i = 1:n
  X = zeros(1,N) ;
  for k = 1:N
    X(k) = MonteCarlo(k) ;
  end
  plot(1:N,X,"+") ;
end
plot(1:N, %pi/4 * ones(1,N) ,"red") ;
```

Que fait ce programme ? Que pensez vous du graphe final obtenu ? Qu'en déduisez vous sur la rapidité de la convergence de la méthode de Monte Carlo sur cet exemple ?