

Ces exercices sont à rédiger sur une feuille au propre et à rendre avant de quitter la salle. Vous êtes grandement incités à utiliser Scilab pour tester vos réponses.

On souhaite étudier l'évolution d'une file d'attente qui suit le modèle suivant : chaque client arrive, se rajoute à la fin de la file, attend que son tour vienne, est servi, puis repart. Soit $t > 0$. On note :

- $a(t)$ le nombre de personnes arrivées dans la file entre le temps 0 et le temps t (y compris celles qui sont déjà reparties et qui ne sont donc plus dans la file),
- $d(t)$ le nombre de personnes qui ont été servies puis sont reparties entre les temps 0 et t ,
- $N(t)$ le nombre de personnes présentes dans la file au temps t (en comptant la personne qui est éventuellement en train de se faire servir).

On peut donc écrire, pour tout $t > 0$,

$$N(t) = a(t) - d(t).$$

Soit λ et μ deux réels strictement positifs. On suppose que les temps entre deux arrivées de clients sont indépendants et suivent des lois exponentielles de paramètre λ , et que les temps de service sont indépendants (et indépendants des temps d'arrivée) et suivent des lois exponentielles de paramètre μ . Soit $n \in \mathbb{N}$. On se place dans le cas où on sait qu'exactly n clients vont se présenter (à des horaires variés) pour être servis un par un. Plus personne n'arrivera après le n -ième client, les clients encore dans la file continueront à être servis jusqu'à ce que la file soit vide.

Exercice 1. Écrire une fonction Scilab `arrivees` qui prend en entrée les valeurs de λ et n , et qui renvoie un vecteur A à n colonnes, où pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, A_i représente l'instant d'arrivée du i -ième client.

Il est conseillé de prendre des valeurs particulières pour tester les lignes de code au fur et à mesure de leur écriture. On pourra par exemple utiliser $\lambda = 2$, $\mu = 3$ et $n = 10$.

Exercice 2. Écrire une fonction Scilab `departs` qui prend en entrée les valeurs de μ , n et le vecteur A des arrivées, et qui renvoie un vecteur D à n colonnes, où pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, D_i représente l'instant de départ du i -ième client.

Attention : quand la file est vide, il est impossible qu'il y ait un départ.

Exercice 3. On suppose que A et D ont été créés comme expliqué dans les questions précédentes. Que contient le vecteur $D - A$?

Exercice 4. Écrire une fonction Scilab `tempsmoyen` qui prend en entrée les valeurs de λ , μ et n , et qui renvoie la moyenne des temps d'attente (temps écoulé entre l'arrivée et le départ) des n clients.

Exercice 5. Comment évolue la moyenne des temps d'attente lorsque λ augmente ? lorsque μ augmente ? On justifiera le raisonnement avec des exemples dans le cas $n = 10\,000$.