Applications linéaires : approfondissements

Exercice 1 (★). On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

1. Caractériser chacun des endomorphismes f de $\mathbb{R}^2$ suivants par l'image d'une base (bien choisie, pour que l'expression des images soit la plus simple possible). Aucune justification n'est demandée.
   (a) la projection sur l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées.
   (b) la projection sur l'axe des abscisses parallèlement à la droite d'équation $y = x$.
   (c) la symétrie centrale.
   (d) la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées parallèlement à l'axe des abscisses.
   (e) la symétrie axiale, d'axe la droite d'équation $y = -x$.
   (f) l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$.
   (g) la rotation par rapport à l'origine, d'angle $\frac{\pi}{4}$.
2. On pose $F_1 = \text{Vect}\,((1,0))$, $F_2 = \text{Vect}\,((0,1))$, $F_3 = \text{Vect}\,((1,1))$, $F_4 = \text{Vect}\,((-1,1))$.
   Caractériser les applications linéaires des questions (a), (b), (c), (d) et (e) par leurs restrictions sur des sous-espaces vectoriels parmi les F_i.

Exercice 2 (★). Soit f l'application définie de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall P(X) \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P(X)) = (P(-1), P(0), P(1)).$$

Montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 (★). Soit u la fonction définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad u((x,y,z)) = (x+z, y-2x, x+3z).$$

Montrer que u est un automorphisme.

Exercice 4 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & XP'(X) + P(0) \end{array}$. Montrer que φ est bien définie et linéaire, puis qu'il s'agit d'un automorphisme.

Exercice 5 (★★). Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, et $f : E \to E$ définie par :

$$f(P(X)) = P(X) + (1-X)P'(X).$$

Montrer que f est une application linéaire et donner une base de $\text{Im}(f)$ et de $\text{Ker}(f)$.

Exercice 6 (★★). Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et a un vecteur non nul de E. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\,\text{id}_E$.

1. Montrer que f est un automorphisme.
2. Montrer que la famille $(a, f(a))$ est libre. Dans la suite, on pose $G_a = \text{Vect}(a, f(a))$.
3. Montrer que G_a est stable par f (c-à-d que $\forall x \in G_a, f(x) \in G_a$).
4. Montrer que si un sous-espace vectoriel F stable par f contient a, alors $G_a \subset F$.
5. Si $E = \mathbb{R}^2$, donner un exemple d'endomorphisme f qui vérifie l'hypothèse de l'énoncé.

Exercice 7 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et u, v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ qui vérifient $u \circ v = 0$. Montrer que $\text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u)$. En déduire que $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) \leqslant n$.

Exercice 8 (★★★). Soit f l'application définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ par $f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Montrer que f est une application linéaire définie de E dans E.
2. Pour $k \leqslant n$, calculer $f(X^k)$. En déduire $\text{Im}(f)$, $\text{Ker}(f)$ et le rang de f.
3. Soit Q un polynôme de $\text{Im}(f)$, montrer qu'il existe un unique polynôme P de E tel que : $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Exercice 9 (★). Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(1) = 2$ et $P(-1) = 3$.

Exercice 10 (★). Déterminer toutes les suites $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n - 8$.

Exercice 11 (★★). Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X+1) = X.P'(X) + 1$.

Exercice 12 (★★). Soit f l'application définie de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ par $f(P(X)) = \int_0^1 P(t)dt$.

1. Vérifier que f est une forme linéaire, et déterminer $\mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 13 (Type DS)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{n+1}[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & (n+1)P(X) - XP'(X) \end{array}$.

1. Montrer que φ est bien définie.
   Indication : introduire un polynôme dont on explicitera les coefficients.
2. Montrer que φ est une application linéaire.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
4. Déterminer le rang de φ. En déduire que φ est surjective.
5. Résoudre l'équation $(n+1)P(X) = XP'(X) + X$, d'inconnue $P(X) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$.