

**Exercice 1 (★).** On se place dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$ .

- Caractériser chacun des endomorphismes  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  suivants par l'image d'une base (bien choisie, pour que l'expression des images soit la plus simple possible). Aucune justification n'est demandée.
  - la projection sur l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées.
  - la projection sur l'axe des abscisses parallèlement à la droite d'équation  $y = x$ .
  - la symétrie centrale.
  - la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées parallèlement à l'axe des abscisses.
  - la symétrie axiale, d'axe la droite d'équation  $y = -x$ .
  - l'homothétie de rapport  $\frac{1}{2}$ .
  - la rotation par rapport à l'origine, d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .
- On pose  $F_1 = \text{Vect}((1, 0))$ ,  $F_2 = \text{Vect}((0, 1))$ ,  $F_3 = \text{Vect}((1, 1))$ ,  $F_4 = \text{Vect}((-1, 1))$ .  
Caractériser les applications linéaires des questions (a), (b), (c), (d) et (e) par leurs restrictions sur des sous-espaces vectoriels parmi les  $F_i$ .

**Résultat attendu :** Ne pas hésiter à faire des dessins pour y voir plus clair...

- |  |   |
|--|---|
| (a) $f((1, 0)) = (1, 0)$ , $f((0, 1)) = (0, 0)$ .  | (b) $f((1, 1)) = (0, 0)$ , $f((1, 0)) = (1, 0)$ .                     |
| (c) $f((1, 0)) = (-1, 0)$ , $f((0, 1)) = (0, -1)$ .  | (d) $f((1, 0)) = (-1, 0)$ , $f((0, 1)) = (0, 1)$ .                    |
| (e) $f((1, 1)) = (-1, -1)$ , $f((-1, 1)) = (-1, 1)$ .  | (f) $f((1, 0)) = (\frac{1}{2}, 0)$ , $f((0, 1)) = (0, \frac{1}{2})$ . |
| (g) $f((0, 1)) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ , $f((1, 0)) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ . |   |
- |  |   |
|--|---|
| (a) $f _{F_1} = \text{id}$ et $f _{F_2} = 0$           | (b) $f _{F_3} = \text{id}$ et $f _{F_2} = 0$          |
| (c) $f _{F_1} = -\text{id}$ et $f _{F_2} = -\text{id}$ | (d) $f _{F_1} = -\text{id}$ et $f _{F_2} = \text{id}$ |
| (e) $f _{F_3} = -\text{id}$ et $f _{F_4} = \text{id}$  |   |

**Exercice 2 (★).** Soit  $f$  l'application définie de  $\mathbb{R}_2[X]$  dans  $\mathbb{R}^3$  par :

$$\forall P(X) \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P(X)) = (P(-1), P(0), P(1)).$$

Montrer que  $f$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Résultat attendu :** On montre la linéarité, puis la bijectivité (plusieurs méthodes possibles).

**Exercice 3 (★).** Soit  $u$  la fonction définie de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad u((x, y, z)) = (x + z, y - 2x, x + 3z).$$

Montrer que  $u$  est un automorphisme.

**Résultat attendu :** On montre la linéarité, puis la bijectivité (plusieurs méthodes possibles).

**Exercice 4 (★★).** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $\varphi : \begin{matrix} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & XP'(X) + P(0) \end{matrix}$ . Montrer que  $\varphi$  est bien définie et linéaire, puis qu'il s'agit d'un automorphisme.

**Résultat attendu :** Pour la bonne définition de  $\varphi$ , il faut montrer que l'image d'un élément de  $\mathbb{R}_n[X]$  est également dans  $\mathbb{R}_n[X]$ . La linéarité se montre en revenant à la définition. On montre ensuite que  $\varphi$  est bijective par une méthode au choix.

**Exercice 5 (★★).** Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$ , et  $f : E \rightarrow E$  définie par :

$$f(P(X)) = P(X) + (1 - X)P'(X).$$

Montrer que  $f$  est une application linéaire et donner une base de  $\text{Im}(f)$  et de  $\text{Ker}(f)$ .

**Résultat attendu :** Une base de  $\text{Im}(f)$  est  $((1 - p)X^p + pX^{p-1})_{p \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ , une base de  $\text{Ker}(f)$  est  $(1 - X)$ .

**Exercice 6 (★★).** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 2$  et  $a$  un vecteur non nul de  $E$ . On considère  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f \circ f = -\text{id}_E$ .

- Montrer que  $f$  est un automorphisme.
- Montrer que la famille  $(a, f(a))$  est libre. Dans la suite, on pose  $G_a = \text{Vect}(a, f(a))$ .
- Montrer que  $G_a$  est stable par  $f$  (c-à-d que  $\forall x \in G_a, f(x) \in G_a$ ).
- Montrer que si un sous-espace vectoriel  $F$  stable par  $f$  contient  $a$ , alors  $G_a \subset F$ .
- Si  $E = \mathbb{R}^2$ , donner un exemple d'endomorphisme  $f$  qui vérifie l'hypothèse de l'énoncé.

**Résultat attendu :** Les quatre premières questions se traitent de manière classique (éventuellement en revenant aux définitions des objets mathématiques impliqués). Un exemple d'endomorphisme qui convient est :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (-y, x) \end{array}$$

**Exercice 7 (★★).** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $u, v$  deux endomorphismes de  $\mathbb{R}^n$  qui vérifient  $u \circ v = 0$ . Montrer que  $\text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u)$ . En déduire que  $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) \leq n$ .

**Résultat attendu :** On montre l'inclusion en revenant à la définition, puis on utilise le théorème du rang.

**Exercice 8 (★★★).** Soit  $f$  l'application définie sur  $E = \mathbb{R}_n[X]$  par  $f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$ .

1. Montrer que  $f$  est une application linéaire définie de  $E$  dans  $E$ .
2. Pour  $k \leq n$ , calculer  $f(X^k)$ . En déduire  $\text{Im}(f)$ ,  $\text{Ker}(f)$  et le rang de  $f$ .
3. Soit  $Q$  un polynôme de  $\text{Im}(f)$ , montrer qu'il existe un unique polynôme  $P$  de  $E$  tel que :  $f(P) = Q$  et  $P(0) = P'(0) = 0$ .

**Résultat attendu :**

1. On montre que  $f$  est linéaire et que l'image d'un élément de  $E$  est bien dans  $E$ .
2. On trouve après simplifications  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-2}[X]$ ,  $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(1, X)$  et  $\text{rg}(f) = n - 1$ .
3. On raisonne par analyse-synthèse, ou en conjecturant un résultat qui convient à l'aide des bases obtenues en question précédente.

**Exercice 9 (★).** Déterminer tous les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que  $P(1) = 2$  et  $P(-1) = 3$ .

**Résultat attendu :** En se ramenant à une résolution d'équation linéaire, on montre que les polynômes solutions sont ceux du type  $P(X) = (X-1)(X+1)Q(X) - \frac{1}{2}X + \frac{5}{2}$ , avec  $Q \in \mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 10 (★).** Déterminer toutes les suites  $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n - 8$ .

**Résultat attendu :** En se ramenant à une résolution d'équation linéaire, on montre que les suites solutions sont celles qui s'écrivent sous la forme :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda(1 + \sqrt{2})^n + \mu(1 - \sqrt{2})^n + 4$  avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ .

**Exercice 11 (★★).** Déterminer tous les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que  $P(X+1) = X.P'(X) + 1$ .

**Résultat attendu :** En se ramenant à une résolution d'équation linéaire, on montre que les polynômes solutions sont ceux du type  $P(X) = \lambda(X-1) + 1$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 12 (★★).** Soit  $f$  l'application définie de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans  $\mathbb{R}$  par  $f(P(X)) = \int_0^1 P(t)dt$ .

1. Vérifier que  $f$  est une forme linéaire, et déterminer  $\text{Im}(f)$ .
2. Déterminer une base de  $\text{Ker}(f)$ .

**Résultat attendu :**

1. On revient à la définition d'une forme linéaire, puis on montre que  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ .
2. Une base de  $\text{Ker}(f)$  est  $(X^p - \frac{1}{p+1})_{p \in [1, n]}$ .